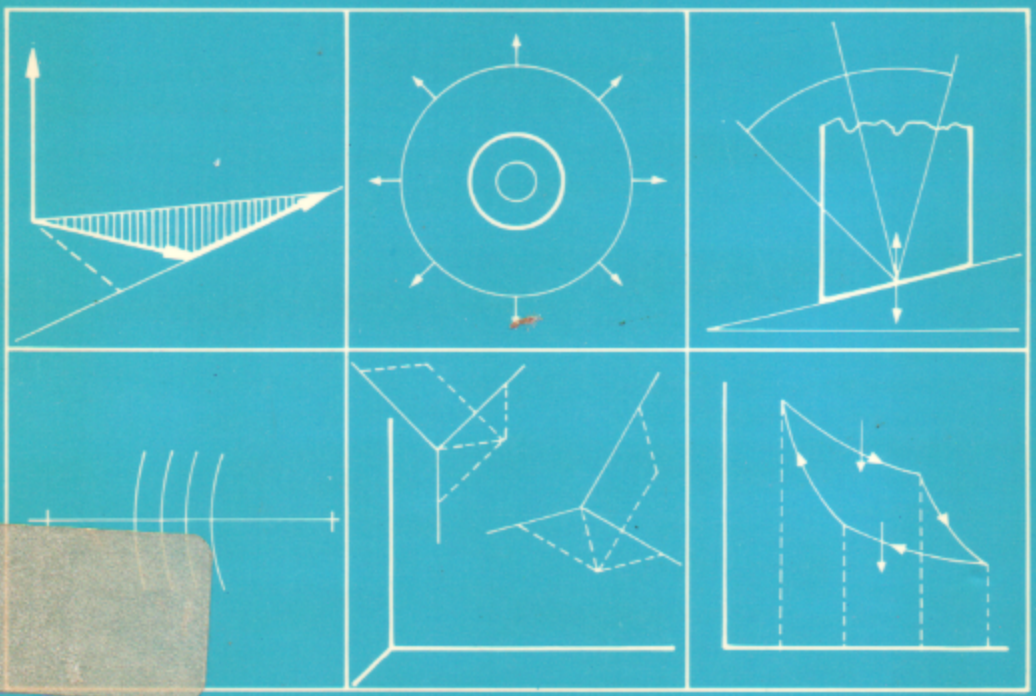
Iniciación a la física

Julián Fernández Ferrer
Marcos Pujal Carrera

Tomo I



editorial reverté, s.a.

INICIACIÓN A LA FÍSICA

61485

Dr. JULIÁN FERNÁNDEZ FERRER, F.I.M.A.

Catedrático de la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros Industriales, Barcelona

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA
GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

Dr. MARCOS PUJAL CARRERA

Catedrático de la Escuela Técnica Superior
de Ingenieros Industriales, Tarrasa

INICIACIÓN A LA FÍSICA

Tomo I

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación, 86-88, 08024 - Barcelona

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español
© **EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1985**
Impreso en España - Printed in Spain

ISBN 84-291-4198-7 (tomo 1)
ISBN 84-291-4272-X (Obra completa)

Dep. Legal. B. 34086-85
EGS - Rosario, 2 - Barcelona

Prólogo

Los avances científicos y tecnológicos progresan de manera espectacular en el siglo que vivimos y la mayoría de estos últimos son fruto de aplicar adecuadamente los conceptos básicos de la Física, tanto clásica como moderna. Es por ello que este libro se ha escrito teniendo en cuenta los principios que son importantes para la tecnología actual.

Es un texto dirigido a los estudiantes que llagan a la Universidad tras haber superado los estudios de Bachillerato, por lo que se les supone en posesión de conocimientos elementales de Álgebra, Trigonometría y Cálculo Infinitesimal. Dichos conocimientos constituyen una herramienta valiosísima para progresar en el estudio de la Física, facilitando su comprensión y permitiendo ahorrar tiempo en su desarrollo.

Nuestro interés ha residido en mostrar cómo se han desarrollado las teorías físicas y no presentarlas como conjunto de hechos que el alumno debe aprender. Pretendemos dar una idea de cómo la observación de los fenómenos y su análisis conducen a las ideas actuales. En ocasiones, la exposición cronológica de los hechos contribuye eficazmente a mostrar la evolución de las ideas que constituyen la base de las teorías del mundo físico de hoy.

La materia tratada en los dos tomos de esta obra tiene una extensión mayor que la que puede tratarse, ordinariamente, en un curso académico. Ello permite al profesor realizar una selección de temas para confeccionar su programa de curso y en ocasiones, cubrir un primer curso de Física y complementar, o fundamentar, un curso posterior. De esta manera, se podrá desarrollar un Curso de Orientación Universitaria, o curso preuniversitario, pues los temas que oficialmente se han de estudiar en dicho curso están contenidos en la obra. El primer curso de Universidad, ya sea para Facultades de Ciencias,

Informática, Farmacia, Medicina, Veterinaria y en todo tipo de Escuelas Técnicas, ya sean Superiores o Universitarias, de Ingeniería o de Arquitectura, puede basarse en este libro cuyo contenido se ha hecho pensando tanto en los temarios españoles como en los de los países americanos de habla hispana.

El primer tomo comienza con tres capítulos en los que se desarrollan temas de carácter matemático de aplicación continua en el estudio de la Física: en el Capítulo 1 se tratan las operaciones algebraicas y de cálculo infinitesimal con vectores libres, en el Capítulo 2 los vectores deslizantes, tratando con cierto detalle los sistemas de ellos y en el Capítulo 3 la teoría de Campos y del Potencial, de la cual se da una idea clara sin utilizar conceptos matemáticos no tratados en estudios anteriores. A continuación se inicia el estudio de la Mecánica, tratando la Cinemática en los Capítulos 4 y 5, la Estática en el Capítulo 6 y la Dinámica en los Capítulos 7 y 8. La teoría vista en estos capítulos corresponde a la Mecánica newtoniana y trata el punto material y los sistemas de puntos materiales. En el Capítulo 9 se estudian los fenómenos relativos a los cuerpos deformables. La Elasticidad se trata de manera elemental, para llegar a la definición de los módulos elásticos y a ciertas relaciones entre ellos, terminando el capítulo con un estudio de los fenómenos de choque. En el Capítulo 10 se presentan los fenómenos de vibraciones, enseñando a integrar la ecuación del movimiento armónico simple y dando una idea intuitiva de cómo se integran las ecuaciones de las vibraciones amortiguadas y forzadas. En el Capítulo 11 se estudia el movimiento ondulatorio y las ideas en él desarrolladas constituyen la base de la Acústica, que se trata en el Capítulo 12. Los fenómenos interfaciales y la Mecánica de Fluidos se examinan, de manera elemental, en los Capítulos 13 y 14 y se cierra esta visión de la Mecánica con el estudio de sus leyes de Semejanza en el Capítulo 15. En el Capítulo 16 se estudian los conceptos de calor y temperatura, sus efectos en los cambios de estado y la transmisión del calor en situaciones estacionarias. La Termodinámica se trata en el Capítulo 17 y la Teoría Cinética de los Gases en el Capítulo 18.

El segundo tomo comienza con tres capítulos dedicados al estudio de la Electrostática en el vacío y en medios materiales, seguido del de los fenómenos de conducción y corriente continua en los Capitulos 4 y 5. La Electrodinámica se trata en los Capítulos 6, 7, 8 y 9 y el Capítulo 10 da una idea de Electrometría y maquinaria eléctrica. La Electrónica se trata brevemente en el Capítulo 11 y en el Capítulo 12 se tratan las ondas electromagnéticas y algunos fenómenos cuya interpretación no se encuentra en la teoría anterior, lo cual sirve de introducción a la Óptica. La Óptica Geométrica se trata en los Capítulos 13

al 16, la Óptica Física en los Capítulos 17 y 18 y la Óptica Energética en los Capítulos 19 al 21. Los tres últimos capítulos del libro se dedican a la Física Moderna y en ellos se da una visión rápida a la Física Atómica y Nuclear y a la Relatividad Restringida.

Al final de cada tomo puede encontrarse un cuestionario en el que se formulan ciertas preguntas que el alumno debe saber responder, así como una colección de problemas con el resultado de muchos de ellos.

No sería justo dejar de manifestar nuestro agradecimiento a nuestros alumnos y colegas de la Universidad Politécnica de Barcelona quienes, con su crítica, tanto han ayudado a que pudiéramos pulir y ordenar adecuadamente los temas de nuestra obra.

LOS AUTORES

Indice de materias

Prólogo v

Introducción xv

CAPÍTULO 1. — CÁLCULO VECTORÍAL 1

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales 1
1.2 Vector; componentes cartesianas 1
1.3 Igualdad y suma de vectores 4
1.4 Vector opuesto de uno dado; diferencia de vectores . . . 6
1.5 Producto de un escalar por un vector 6
1.6 Versores; expresión de un vector en función de los versores de los ejes cartesianos 7
1.7 Producto escalar de dos vectores 8
1.8 Producto vectorial de dos vectores 10
1.9 Vector función de un escalar 13
1.10 Derivada de un vector 13
1.11 Integral de un vector 15

CAPÍTULO 2. — VECTORES DESLIZANTES 16

2.1 Tipos de vectores 16
2.2 Momento de un vector respecto a un punto 16
2.3 Momento de un vector respecto a un eje 18
2.4 Componentes de un vector deslizante 19
2.5 Sistemas de vectores deslizantes 20
2.6 Trinomio invariante 21
2.7 Eje central 22
2.8 Reducción de un sistema de vectores deslizantes 24
2.9 Centro de vectores paralelos 26

CAPÍTULO 3. — CAMPOS Y POTENCIAL 28

3.1 Campos escalares y campos vectoriales 28
3.2 Circulación de un vector a lo largo de un camino 29
3.3 Potencial 30
3.4 Superficies equipotenciales 32
3.5 Flujo de un vector a través de una superficie 33

3.6 Campos centrales 34
3.7 Campo newtoniano 35
3.8 Teorema de Gauss 36
3.9 Campo creado por una capa esférica 38
3.10 Campo creado por una distribución con simetría esférica . . 39

CAPÍTULO 4. — CINEMÁTICA DEL PUNTO 41

4.1 Movimiento de un punto; vector de posición 41
4.2 Velocidad 42
4.3 Aceleración 43
4.4 Movimientos rectilíneos 46
4.5 Movimiento circular 48
4.6 Unidades de velocidad y de aceleración 49

CAPÍTULO 5. — CINEMÁTICA DE LOS SISTEMAS RÍGIDOS . . . 50

5.1 Movimiento de traslación 50
5.2 Movimiento de rotación 51
5.3 Movimiento helicoidal 53
5.4 Distribución de las velocidades en un movimiento cualquiera . 54
5.5 Relatividad del movimiento 59
5.6 Composición de velocidades 61
5.7 Composición de aceleraciones; teorema de Coriolis . . . 62
5.8 Movimiento plano 63

CAPÍTULO 6. — ESTÁTICA 66

6.1 Concepto estático de fuerza 66
6.2 Estática del punto 67
6.3 Principio de la igualdad de la acción y la reacción . . . 69
6.4 Estática de los sistemas de puntos 70
6.5 Estática de los sistemas rígidos 71
6.6 Estática de un sistema de cuerpos rígidos 76
6.7 Rozamiento 77
6.8 Irreversibilidad de la cuña 79
6.9 Rozamiento por rodadura y por pivotamiento 79
6.10 Trabajo 80
6.11 Estática gráfica 81

CAPÍTULO 7. — DINÁMICA DEL PUNTO 86

7.1 Principios fundamentales de la Dinámica 87
7.2 Unidades de masa, fuerza y trabajo 90
7.3 Sistemas inerciales 92
7.4 Fuerzas de inercia 93
7.5 Energía cinética 94
7.6 Energía mecánica; su conservación 94
7.7 Potencia; acción 95
7.8 Impulso de una fuerza y cantidad de movimiento 96
7.9 Momento cinético 99
7.10 Fuerzas centrales; ley de las áreas 100
7.11 Gravitación 101

7.12 Experimento de Cavendish 103
7.13 Leyes de Kepler 103
7.14 Movimiento planetario 104
7.15 Campo gravitatorio terrestre; masa pesante y masa inerte . 105
7.16 Trabajo y energía en un campo gravitatorio; velocidad de escape 108

CAPÍTULO 8. — DINÁMICA DE LOS SISTEMAS 111

8.1 Centro de masa 111
8.2 Cantidad de movimiento y momento cinético de un sistema . 116
8.3 Movimiento del centro de masa 118
8.4 Teorema de las fuerzas vivas 119
8.5 Rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo 119
8.6 Momento de inercia 121
8.7 Teorema de Steiner 124
8.8 Trabajo y energía en el movimiento de rotación 125
8.9 Energía cinética de un sólido libre 126
8.10 Momento cinético de un cuerpo rígido respecto al eje de rotación 128

CAPÍTULO 9. — ELASTICIDAD Y CHOQUE 130

9.1 Cuerpos elásticos 130
9.2 Elasticidad por tracción 132
9.3 Contracción transversal; coeficiente de Poisson 133
9.4 Deformaciones debidas a tres esfuerzos ortogonales . . . 134
9.5 Compresión uniforme 136
9.6 Cizalladura 137
9.7 Torsión 137
9.8 Energía elástica 138
9.9 Percusión 138
9.10 Centro de percusión 140
9.11 Choque 141

CAPÍTULO 10. — VIBRACIONES 145

10.1 Movimiento armónico simple 145
10.2 Significado cinemático de ω 149
10.3 Algunos m.a.s. 150
10.4 M.a.s. angular 152
10.5 Fuerza central atractiva y proporcional a la distancia . . . 154
10.6 Composición de movimientos armónicos perpendiculares . . 159
10.7 Composición de dos m.a.s. de la misma dirección y pulsación . 163
10.8 Oscilaciones amortiguadas 165
10.9 Oscilaciones forzadas 171
10.10 Resonancia 174
10.11 Potencia disipada en las oscilaciones forzadas 176

CAPÍTULO 11. — MOVIMIENTO ONDULATORIO 177

11.1 Movimiento ondulatorio armónico 178
11.2 Celeridad de propagación de una onda longitudinal . . . 180
11.3 Celeridad de propagación de una onda transversal . . . 182

11.4 Intensidad de un movimiento ondulatorio 183
11.5 Absorción 184
11.6 Principio de Huygens 185
11.7 Reflexión y refracción de una onda plana 186
11.8 Reflexión con cambio de fase 190
11.9 Interferencias 191
11.10 Pulsaciones 193
11.11 Ondas estacionarias 195
11.12 Difracción 198

CAPÍTULO 12. — ACÚSTICA 202

12.1 Cualidades del sonido 203
12.2 Fenómenos de propagación 207
12.3 Efecto Doppler-Fizeau 211
12.4 Onda balística 213
12.5 Producción de sonidos musicales 214
12.6 Resonancia acústica 219
12.7 Acústica fisiológica 221
12.8 Infrasonidos y ultrasonidos 225
12.9 Acústica arquitectónica 226

CAPÍTULO 13. — ESTÁTICA DE FLUIDOS. FENÓMENOS INTERFACIALES 232

13.1 Fluidos 232
13.2 Presión en el seno de un fluido 233
13.3 Equilibrio de un fluido en el campo de la gravedad . . . 235
13.4 Medida de la presión de un gas 237
13.5 Unidades de presión 240
13.6 Principio de Pascal 241
13.7 Ley de Boyle-Mariotte 242
13.8 Principio de Arquímedes 243
13.9 Compresibilidad de los gases 246
13.10 Fuerzas intermoleculares; cohesión 247
13.11 Tensión superficial 249
13.12 Presión debida a la curvatura de la superficie libre . . . 251
13.13 Contacto entre dos líquidos 251
13.14 Contacto entre sólido y líquido 253
13.15 Capilaridad; ley de Jurin 254

CAPÍTULO 14. — DINÁMICA DE FLUIDOS 255

14.1 Movimiento estacionario de un fluido 255
14.2 Ecuación de continuidad 256
14.3 Teorema de Bernoulli 257
14.4 Aplicaciones 259
14.5 Teorema de Torricelli 261
14.6 Viscosidad 262
14.7 Circulación de un líquido viscoso por un tubo 263
14.8 Régimen turbulento 266
14.9 Resistencia de un fluido al movimiento de un cuerpo . . . 266

CAPÍTULO 15. — LEYES DE SEMEJANZA EN LA MECÁNICA . . . 269

15.1 Semejanza geométrica 269
15.2 Tiempos homólogos 269
15.3 Semejanza cinemática 270
15.4 Semejanza material 272
15.5 Semejanza dinámica 272
15.6 Generalización del concepto de semejanza 273
15.7 Grupos adimensionales 275
15.8 Teorema de π o de Buckingham 276
15.9 Número de Newton-Euler 277
15.10 Número de Froude 278
15.11 Número de Weber 279
15.12 Número de Reynolds 280
15.13 Número de Mach 281
15.14 Número de Cauchy 282
15.15 Empleo de los grupos adimensionales 283

CAPÍTULO 16. — CALOR Y CAMBIOS DE ESTADO 284

16.1 Temperatura 284
16.2 Calor 286
16.3 Calorímetro adiabático 290
16.4 Cambios de estado 291
16.5 Fusión y solidificación 292
16.6 Vaporización y condensación 294
16.7 Ebullición 295
16.8 Propiedades de los vapores saturados y no saturados . . . 296
16.9 Humedad 297
16.10 Sublimación 300
16.11 Punto triple 301
16.12 Licuación de los gases 301
16.13 Propagación del calor 303
16.14 Conducción del calor a través de una pared plana sin pérdidas laterales 304
16.15 Determinación experimental de la conductibilidad (método de Searle) 307
16.16 Conducción del calor a través de una pared compuesta de láminas de distintos materiales 307
16.17 Conducción del calor a través de las paredes de un tubo cilíndrico 309
16.18 Ley de Wiedemann-Franz 310
16.19 Ejemplos de conducción de la energía calorífica 311
16.20 Convección 311
16.21 Ley de Newton del enfriamiento 312

CAPÍTULO 17. — TERMODINÁMICA 313

17.1 Estado de un sistema 313
17.2 Diagramas termodinámicos 315
17.3 Transformaciones reversibles 316
17.4 Trabajo de dilatación de un sistema 318
17.5 Transformaciones cerradas 319
17.6 Principio de conservación de la energía 320
17.7 Primer principio de la termodinámica 321
17.8 Entalpía; experimento de Joule y Kelvin 323

17.9 Calores molares de los gases perfectos 325
17.10 Transformaciones adiabáticas de los gases perfectos . . . 327
17.11 Ciclo de Carnot 329
17.12 Rendimiento de un ciclo de Carnot 330
17.13 Necesidad de un criterio de evolución 333
17.14 Móvil perpetuo de segunda especie 334
17.15 Teorema de Carnot 335
17.16 Escala termodinámica de temperatura 337
17.17 Entropía 337
17.18 Segundo principio de la Termodinámica 340
17.19 Rendimiento de las máquinas reales 341
17.20 Otros enunciados del segundo principio 343

CAPÍTULO 18. — TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES 346

18.1 Postulados de la teoría cinética 346
18.2 Interpretación cinética y cálculo de la presión de un gas . . 347
18.3 Consecuencias de la teoría cinética 350
18.4 Ley de Dalton 352
18.5 Difusión de los gases 353
18.6 Equipartición de la energía 354
18.7 Calores molares de los gases perfectos 356
18.8 Recorrido libre medio 357
18.9 Fenómenos de transporte 359
18.10 Difusión mutua de dos gases 361
18.11 Entropía, desorden y probabilidad termodinámica . . . 362

Cuestionario 366

Respuestas al cuestionario 376

Problemas 379

Apéndice 411

Índice alfabético 415

Introducción

En la vida corriente nos encontramos con gran variedad de sucesos o hechos naturales que nos impresionan y que a ciertos espectadores les interesa conocer o, al menos, despiertan su curiosidad, para su posible interpretación. Un espectador inquieto puede intentar comprender, explicar y estudiar tales hechos; para ello necesita una cierta formación científica que le capacite para interpretarlos y luego estudiarlos de manera objetiva. En principio, la interpretación sería bastante sujetiva y esto es lo que se desprende al estudiar la Historia de la Ciencia. Los fenómenos naturales se han interpretado de maneras diferentes en el transcurso del tiempo.

Mediante los órganos de los sentidos obtenemos unos estímulos (visión, audición, etc.) que se traducen en reacciones del organismo, las cuales proporcionan información de los hechos acaecidos y que se podrán estudiar posteriormente, en particular si los hechos son periódicos o de observación diaria (movimiento de una rueda, caída de los cuerpos, movimientos de cuerpos celestes). El hombre primitivo ya se había dado cuenta del movimiento del Sol y de las estrellas, aunque al principio no lo interpretó debidamente. La caída de los cuerpos, discutida por los filósofos griegos, no se interpretó hasta los experimentos de Galileo y la ley de Newton.

A partir de las impresiones primarias, se pueden deducir relaciones o leyes sencillas de hechos naturales interpretados de manera simplista, eliminando condicionantes y planteando el problema de la manera más apta para su explicación. A fin de proceder de manera sistemática, vamos a definir algunos términos o conceptos fundamentales que nos van a ser útiles para el desarrollo de las ideas que necesitamos para edificar la estructura de la Ciencia y así comprender los hechos naturales.

a) *Sensación.* La *sensación* es un hecho psíquico resultante de la acción de un «estímulo» sobre un «receptor» sensorial; por ejemplo, una onda sonora (estímulo) produce una sensación en el aparato auditivo (receptor). Del receptor se transmite al cerebro y da lugar a una percepción: puede ser una conversación, un concierto, etc. Si se tratase de ondas luminosas, el receptor sería el ojo y la percepción constituye la imagen. La Psicofísica estudia las relaciones entre sensación y estímulo. Esta relación, como veremos, se traduce en leyes físicas; un ejemplo lo tenemos en la ley psicofísica de Weber-Fechner (§ 12.7, tomo I) que permite entre otras, llegar a la ley física que nos da el nivel de sonoridad conociendo la intensidad de la onda sonora.

Todo ser vivo experimenta sensaciones y en muchos casos, estas sensaciones representan un análisis subjetivo del ambiente y proporcionan una información que depende del ser en cuestión y del grado de desarrollo o preparación del mismo; los murciélagos pueden emitir y percibir ultrasonidos, cosa que no pueden hacer otros seres vivos.

Cada órgano de los sentidos nos proporciona una sensación determinada que está caracterizada por atributos o caracteres distintivos, los principales son: cualidad, intensidad, extensión y duración.

Generalmente, las sensaciones se identifican y nombran por sus cualidades. Por ejemplo: color rojo, azul, etc., sabor dulce, amargo. Cualquiera de estas cualidades puede variar en intensidad. Veremos en la teoría del color (§ 21.6, tomo II) que se puede establecer una gradación de sensación de color que recibe el nombre de *matiz.*

Aunque la sensación suele depender de un estímulo, a veces puede depender de más de uno; por ejemplo, en la audición del sonido la sensación sonora depende de la energía recibida y de la frecuencia de tal sonido (v. § 12.7, tomo I).

b) *Propiedades y fenómenos.* A los atributos esenciales de las cosas se les llama *propiedades*: dureza, fragilidad, peso, etc. El concepto de *fenómeno,* desde el punto de vista etimológico, es el de «cosa que aparece» y puede considerarse como cualquier objeto, hecho u ocurrencia percibida, es decir, que nos produce cierta sensación. También puede considerarse fenómeno cualquier manifestación de actividad que se produce en la Naturaleza, o cualquier tipo de cambio: fusión, reflexión de una onda, atracción eléctrica entre cuerpos cargados, etc. A partir del siglo XVII, los científicos utilizaron la palabra fenómeno para designar hechos percibidos por ellos y que intentaban explicar, tales como los fenómenos astronómicos, magnéticos, etc.

El fenómeno, a pesar de ser una realidad objetiva (un hecho que se produce), un espectador corriente lo interpreta subjetivamente, a

su manera, dependiendo su interpretación de la preparación y perspicacia del mismo, pasando desapercibido por algunos y siendo interpretado justamente por otros; supongamos que por una chimenea sale humo que asciende verticalmente y luego se inclina. Una persona corriente tal vez no se fije en ello; un físico dirá que en la parte inferior de la atmósfera el aire está en calma pero que, a cierta altura (que podría determinar), el viento sopla en dirección y sentido determinados y que también podría hallar. La Ciencia tiende a interpretar los fenómenos y a estudiar las propiedades de las cosas desde un punto de vista objetivo. En el transcurso del tiempo, se han interpretado diversos fenómenos de maneras distintas; por ejemplo, el calor, que ahora se considera una forma de la energía, se había tratado hasta el siglo pasado como un fluido (§ 16.2, tomo I). Sin embargo, no todos los fenómenos pueden interpretarse de manera rigurosamente correcta y en la actualidad no lo han sido, entre otros, algunos fenómenos nucleares. Tradicionalmente, la parte de la Ciencia que estudiaba las propiedades de la materia y de la energía, así como todos los fenómenos característicos de la misma, recibía el nombre de Física, dejando para la Química los característicos de las distintas clases de materia, en particular la formación y propiedades de las moléculas, y para la Biología los relacionados con los seres vivos. Sin embargo, hoy en día la línea de separación entre Física, Química y Biología es, a veces, difícil de precisar y los físicos trabajan en problemas biológicos (Biofísica) y la Química fundamental es una parte de la Física. Posiblemente, las tres lleguen a formar una misma Ciencia. No obstante, vamos a considerar el punto de vista tradicional, tal como se viene haciendo por el momento.

c) *Leyes físicas.* El estudio de los fenómenos naturales nos proporciona relaciones entre los mismos las cuales se traducen en leyes que, si los fenómenos son los que convencionalmente llamamos físicos, se denominan *leyes físicas.* Podemos definir la ley física diciendo que es el enunciado del comportamiento de un fenómeno físico obtenido por inducción después del análisis de cierto número de experiencias (véase apartado *d*) análogas, expresando los resultados mediante relaciones analíticas que se traducen en lo que, corrientemente, se llama una fórmula empírica. A veces, la deducción es teórica y a partir de ciertos postulados avalados por la experiencia se llega a la ley física. Verdad es que, en el transcurso del tiempo, ciertas leyes han tenido que modificarse para obtener mayor generalidad, casos de la Física Relativista y la Cuántica, si bien en multitud de aplicaciones siguen siendo válidas. La Mecánica newtoniana clásica es válida para los fenómenos macroscópicos.

d) Observación y experimentación. Al efectuar el examen de alguna cosa o fenómeno con atención, tanto si el examen es directo como si lo realizamos mediante instrumentos adecuados, decimos que estamos realizando una *observación* destinada a conocer la naturaleza física de los hechos en cuestión (movimiento, variación térmica, etc.), deduciendo información suficiente para sacar consecuencias e intentar establecer leyes físicas de los fenómenos observados. La observación debe efectuarse de manera que el observador describa fielmente las circunstancias de lo observado; es decir, debe ser objetiva. La experimentación consiste en observar el fenómeno en circunstancias determinadas, que pueden modificarse variando alguno de los factores o parámetros que intervienen y repitiendo la observación las veces que sea necesario. La observación de los fenómenos que se producen en la Naturaleza no es suficiente, en muchos casos, para aclarar las causas que los originan o para encontrar leyes que relacionen los parámetros entre si. Al razonar sobre lo percibido, se intenta repetir, a veces, el fenómeno en estudio o producir en el laboratorio un fenómeno análogo a escala reducida. Todo esto constituye la realización de un experimento. GALILEO fue uno de los primeros experimentadores al estudiar la caída de los cuerpos mediante el plano inclinado (§ 7.1, tomo I).

e) Método. La Física tiene un sello especial: su *método*. Este método maneja conceptos fijos definidos de manera necesaria, suficiente e invariable. Para operar con nociones fijas, la Lógica ha desarrollado un cuerpo de doctrina que, en el transcurso del tiempo, ha conseguido un desarrollo extraordinario: las Matemáticas. Puede decirse, en cierto modo, que las Matemáticas constituyen la lógica de la Física.

El método ha comunicado a la Física la facultad de conseguir resolver los problemas que caen en su campo; bien entendido que en cada época, como hemos indicado anteriormente, quedan muchos problemas sin resolver y de la resolución de un problema surgen, en ocasiones, otros nuevos. A veces se resuelven perfeccionando las técnicas experimentales después de aclarar y determinar los conceptos en torno a los cuales gira el problema.

Para conseguir el conocimiento de las leyes físicas, los investigadores tienen dos métodos a seguir: el experimental y el teórico. El primero establece las condiciones experimentales, ya citadas, para conocer la variación de las propiedades de los cuerpos o de los fenomenos producidos en estudio y poder encontrar las relaciones entre los parámetros que intervienen. Si se provoca el fenómeno en el laboratorio, podrán mantenerse constantes ciertos parámetros y variar otros para que el estudio sea más simple, encontrando leyes más sencillas

aunque con un grado de aproximación suficiente. Variando las condiciones del experimento, se encontrarán relaciones que pueden ser válidas para fenómenos de mayor complejidad y por inducción, hallar la relación válida para otros fenómenos no investigados, con lo que la eleva al rango de ley física. La importancia del método experimental la expresó H. POINCARÉ diciendo que «dentro de la Ciencia, el único manantial de verdad es la experimentación y que solamente ella puede enseñarnos algo realmente nuevo».

El método teórico es completamente distinto. Se parte de la hipótesis de que todas las leyes se pueden deducir como casos particulares a partir de unos pocos teoremas previamente establecidos. Esto es posible cuando tan sólo un pequeño número de magnitudes físicas (véase apartado *f*) tenga significado independiente y todas las demás se deduzcan de ellas. Una de las principales tareas del físico teórico es establecer relaciones entre tales magnitudes y los fenómenos observados; es decir, formar la hipótesis y la teoría. La distinción entre ambas no es precisa y se habla de hipótesis cuando se ha expresado una supuesta relación de manera incompleta y de teoría cuando se construye un cuerpo de doctrina basado en la hipótesis, en particular si tiene forma matemática.

La teoría es correcta cuando, procediendo con rigor lógico, llega a conclusiones que están en perfecto acuerdo con la experiencia, dentro de los límites de error de cada medida (véase apartado *h*); la teoría electromagnética de la luz, debida a MAXWELL, fue comprobada por HERTZ con sus famosos experimentos (§ 12.3, tomo II). Si en algún caso se hallara alguna discrepancia con los hechos observados, deberá revisarse la teoría y encontrar otra más general que englobe todos los fenómenos hasta entonces observados. Así, por ejemplo, la Mecánica de Newton puede considerarse un caso particular de la Mecánica relativista de Einstein.

El físico, para sus investigadores, necesita herramientas de trabajo. El teórico utiliza los métodos matemáticos creando, en ocasiones, nuevos métodos que, aunque ideados para resolver un problema concreto, se extienden frecuentemente con éxito a otros campos de la Física. El físico experimental necesita laboratorios con los aparatos adecuados a su trabajo, modificándolos o ideando otros nuevos para poder estudiar otros fenómenos. Si bien es cierto que, en épocas pasadas, se realizaron grandes descubrimientos con aparatos relativamente simples y generalmente improvisados (FARADAY, COULOMB, etc.), hoy día las herramientas de investigación son, cada vez, más complicadas y los laboratorios se convierten en complejas instalaciones (laboratorios de Física nuclear, etc.).

f) Magnitudes y sistemas de unidades. Al estudiar los fenómenos nos encontramos con hechos en los cuales intervienen factores o parámetros que se han de comparar y medir. LORD KELVIN (1824-1907) decía: «sólo cuando es posible medir y expresar en forma numérica aquello de que se habla, se sabe algo acerca de ello; nuestro saber será deficiente mientras no seamos capaces de traducirlo en números». Al estudiar la teoría del color veremos (§ 21.10, tomo II) que esta sensación puede medirse y por ello podremos hablar del color de un cuerpo y comparar los colores de diversos objetos.

Daremos el nombre de *magnitud física* a todo ente mensurable en el cual puedan establecerse relaciones de igualdad y de suma. La longitud de una varilla es una magnitud. Podemos establecer cuándo son iguales las longitudes de dos varillas y podemos expresar que cierta varilla tiene una longitud doble que otra o que su longitud es la suma de las longitudes de otras dos. Si tomamos arbitrariamente una longitud unidad, por ejemplo, el palmo, la pulgada, etc., podemos comparar cualquier longitud con la tomada por unidad y decir que la longitud de la varilla en cuestión es tres veces mayor o cuatro veces y media. La comparación de la magnitud con otra tomada, arbitrariamente, como unidad nos da el valor de la magnitud expresado en las unidades adoptadas, es decir, podemos medir magnitudes comparándolas con una unidad y expresar el valor de la magnitud en la unidad correspondiente. Si hemos adoptado la pulgada y la varilla tiene una longitud tres veces mayor que la de la pulgada, diremos que el valor de la longitud es de tres pulgadas. O también podemos decir que la varilla medida tiene una cantidad de pulgadas igual a tres. En general, si una magnitud contiene n veces una unidad u, la magnitud tiene un valor $V = n\,u$. Al valor V de la magnitud se le acostumbra a llamar *cantidad* y vendrá expresada por un número real. Al expresar la cantidad o valor de la magnitud, deberemos indicar de manera expresa la unidad con que se ha medido. Podía haber sido 60,53 cm = 605,3 mm; en este caso tenemos que utilizar unidades más pequeñas para poder apreciar la fracción correspondiente. Si hubiésemos tomado como unidad el palmo, solamente podríamos decir que la longitud era algo mayor que tres palmos.

Se dice que una medida es *directa* cuando es posible la comparación inmediata, como en el caso de la longitud de la varilla. Cuando la medida es el resultado de una combinación de medidas directas, se dice que es una medida *indirecta,* como ocurre en la medida de velocidades, campos magnéticos, etc.

Existen magnitudes puramente geométricas, tales como la longitud, la superficie o el volumen. Conociendo la longitud de los lados o

de las aristas de diversas figuras geométricas podemos hallar su superficie o su volumen. La longitud es una magnitud geométrica fundamental, las otras dos son derivadas. En Física pueden tomarse algunas magnitudes como fundamentales y las demás serán derivadas de ellas. En las distintas partes de la Física se requieren algunas magnitudes como fundamentales. Existen muchos *sistemas de unidades* en los cuales se adoptan como fundamentales magnitudes arbitrarias, en el menor número posible, para que todas las demás sean derivadas de ellas. Por tanto, para la medida de tales magnitudes podrán existir numerosos sistemas de unidades.

Un sistema que se utilizó mucho en Física, hasta hace poco, fue el c.g.s., o cegesimal, que adoptaba el centímetro para la medida de la longitud, el gramo para la de la masa y el segundo para la del tiempo. Para la Mecánica no presentaba problemas, pero para la Electricidad y Magnetismo se complicaba y además discrepaba de las unidades que se utilizaban en la mayoría de aplicaciones técnicas. Más complicado resultaba el tomar unidades distintas a las del sistema métrico internacional, lo que sucedía en los países anglosajones. Por tales razones, se adoptó el sistema Giorgi o MKSA en el cual las magnitudes fundamentales eran la longitud, con unidad el metro; la masa, con unidad el kilogramo; el tiempo, con unidad el segundo; y la intensidad de corriente eléctrica, con unidad el ampere. Añadiendo la temperatura absoluta, con unidad el kelvin; la cantidad de sustancia, con unidad el mol; y la fotométrica de intensidad luminosa, con unidad la candela, obtenemos un sistema que se ha adoptado prácticamente en todo el mundo y que recibe el nombre de Sistema Internacional (SI); es decir, que es una ampliación del sistema Giorgi o MKSA y las magnitudes que no se derivan de las tres añadidas pueden denominarse MKSA, si bien utilizaremos siempre el SI, adoptado en España por la ley de Pesas y Medidas de 8-XI-67, con las modificaciones acordadas en el Decreto de 25-IV-74.

En resumen, podemos establecer el cuadro siguiente:

Magnitud	Unidad	Abreviatura
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de la corriente	ampere	A
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd

Las unidades derivadas se forman combinando las básicas por medio de relaciones algebraicas que liguen las correspondientes magnitudes. Por ejemplo, la magnitud velocidad se mide en m/s y el calor específico en J/kg. K = m^2/s^2. K. Para la medida de ángulos existen unas unidades suplementarias, cuales son: para el ángulo plano el radián (rad) y para el ángulo sólido el estereorradián (sr).

En la Tabla 1 del Apéndice se dan los prefijos para formar los múltiplos y submúltiplos de las unidades; y en la Tabla 2 las unidades derivadas más importantes.

Al hablar de la medición, se ha indicado que el valor de la magnitud se establece por comparación con una unidad establecida en el sistema a utilizar. La materialización de dicha unidad constituye un *patrón*. Para las unidades fundamentales se eligen unos patrones primarios, los cuales han evolucionado para mejorar su precisión, conservación, reproducción y en algunos casos, su realización. Algunas veces, dichos patrones pueden realizarse en un laboratorio convencional, mientras que en otras es necesario tener patrones aproximados; ahora bien, en cada país existe una oficina de normalización que podrá realizar o adoptar los patrones propuestos.

La unidad de longitud, el metro, se definió antes del siglo XVIII diciendo que era la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y se efectuaron medidas muy precisas de la longitud de un cuadrante de meridiano; pero debido a dificultades de la medida, tal definición podría dar lugar a una indeterminación y por ello se tomó un valor que representa la distancia entre dos ranuras practicadas en una barra de forma determinada, a cierta temperatura, depositada en el Pabellón Breteuil en Sèvres (cerca de París). Esta distancia fue el primer patrón de longitud, del cual se sacaron copias (patrones secundarios) y se distribuyeron a las Oficinas de Normalización de los países que lo solicitaron. En la actualidad, desde 1960, la Conferencia General de Pesas y Medidas adopta la definición del metro desde el punto de vista óptico (véase § 17.10, tomo II).

El patrón de masa primario se definió diciendo que era la masa de 1 litro de agua destilada a 4° C y se llamó kilogramo. La I Conferencia General de Pesas y Medidas en 1889, sancionó el prototipo internacional del kilogramo diciendo que es la masa de un cilindro de platinoiridio que se conserva en el Pabellón Breteuil antes citado y que constituye, hasta ahora, el patrón de masa en el SI.

La unidad de tiempo va asociada a fenómenos periódicos que ocurren en la Naturaleza (oscilaciones pendulares, elásticas, movimientos astronómicos, etc.). La rotación de la Tierra fue el fenómeno que se tomó como base. Al período de rotación de la Tierra relativo a estrellas

fijas se le llama *día sidéreo* y el relativo al Sol, *día solar*. La duración del día solar varía con la estación del año y su valor medio es 1/365,256 mayor que el día sidéreo. El día solar y el sidéreo se dividen en horas, minutos y segundos. La unidad de tiempo, el segundo, adoptada hasta 1955 fue 1/86 400 del día solar medio. Más adelante se creyó conveniente relacionarlo con la duración de un año. En 1960, la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas definió el segundo diciendo que es 1/31556925,9747 del año trópico 1900. *

Modernamente, se han construido relojes de cuarzo cuyas vibraciones pueden reproducir el valor del segundo y sus submúltiplos con gran precisión. En la actualidad, teniendo en cuenta que los fenómenos periódicos atómicos tienen una constancia superior a los procenómicos, se han construido relojes de alta precisión mediante procesos atómicos del isotopo del cesio ^{133}Cs. En octubre de 1964 se decidió adoptar en el SI la definición del segundo diciendo que es el intervalo de tiempo transcurrido entre 9 192 631 770 oscilaciones de la transición atómica del ^{133}Cs. Así pues, el oscilador de cesio, con un equipo adecuado, ha resultado ser el patrón de tiempo, por lo que el valor del segundo se puede mantener y reproducir fielmente en un laboratorio. De todas maneras, el segundo definido astronómicamente difiere muy poco de éste (del orden de 10^{-8}).

Con relación al *kelvin*, véase § 16.1, tomo I y § 17.16, tomo I; para el *ampere* véase § 6.15, tomo II y para la *candela* véase § 21.1, tomo II.

En cuanto al *mol* se define de la manera siguiente: «El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tanta entidades elementales como átomos hay en 0,012 kg de carbono 12». Así, puede hablarse de 1 mol de moléculas, de átomos o de electrones.

g) *Cualidades de los aparatos de medida.* La medida de las distintas magnitudes se realiza con aparatos que poseen propiedades o cualidades propias de los mismos. De entre tales cualidades, podemos considerar como más importantes las siguientes:

Exactitud. Es la coincidencia del valor obtenido en la medida de la magnitud con el valor real de la misma. Es muy difícil que una medida sea rigurosamente exacta a causa, principalmente, de las deficiencias de los aparatos, del manejo de los mismos por el observador y de las condiciones en que se efectúa la medida. Por tanto, la exactitud será una aproximación a la realidad de la medida y no podremos hablar de aparatos rigurosamente exactos, en el sentido absoluto de la palabra.

* El *año trópico* es el intervalo de tiempo transcurrido entre el paso del Sol dos veces consecutivas por el punto aries (punto γ) o equinoccio de primavera. La duración del año trópico de 1900 fue de 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos, o sea 365,2422 días, o bien 31 556 925, 9747 segundos.

Sensibilidad. Es la cualidad de poder apreciar pequeñas variaciones (diferencias) de la magnitud a medir. Por ejemplo, un termómetro corriente nos permite apreciar una temperatura en grados y medios grados. Uno clínico nos permite apreciar las décimas de grado y los hay tan sensibles que permiten apreciar hasta milésimas de grado. En el caso de la balanza ocurre algo parecido: las balanzas utilizadas en el comercio permiten apreciar gramos. Las microbalanzas permiten apreciar centésimas y milésimas de miligramo.

Precisión. Es el grado de aproximación de la medida que da el aparato, al valor real de la magnitud. Cuanto mayor sea la precisión, tanto más exacto es el aparato (tiende a la exactitud, según se ha dicho al hablar de esta cualidad). Un aparato sensible no tiene por qué ser preciso; un termómetro de gran sensibilidad podría estar mal calibrado o con algún defecto y ser menos preciso que otro menos sensible.

Fidelidad. Es la reiteración del valor obtenido en las medidas efectuadas de una misma magnitud por el mismo observador en las mismas condiciones.

Si existiese un aparato exacto, debería poseer, evidentemente, todas las cualidades antes citadas.

h) Errores de las medidas. Al hablar de la exactitud de los instrumentos de medida, ya hemos expresado que la medida no es exacta en el sentido absoluto de la palabra y será un número aproximado al valor real de la misma. Lo que podemos decir es que este valor se halla dentro de cierto intervalo en torno al indicado por el instrumento que se ha utilizado para tal medida. Los resultados de un conjunto de medidas de una misma magnitud presentarán cierta dispersión, tanto menor cuanto más preciso sea el aparato.

Se llama *error absoluto* ε_a de una medida a la diferencia entre el valor exacto y el que hemos obtenido. Puede ser por defecto o por exceso, según que el valor obtenido sea menor o mayor respectivamente, que el verdadero, por lo que el primero será positivo y el segundo negativo. Ya hemos comentado que, por lo general, el valor exacto no se conoce y por tanto, no se puede saber qué error se comete, aun cuando se puede tener idea de su orden de magnitud y de su valor máximo; por tanto, si sabemos cuál es la precisión del aparato podremos acotar los errores. Supongamos un termómetro bien calibrado, dividido en grados. Si podemos apreciar bien media división, cuando la columna quede entre dos divisiones podremos saber si está antes o después de la mitad de distancia entre grados, por lo que el error máximo cometido será de medio grado.

Se llama *error relativo* ε_r al cociente entre el error absoluto y el valor de la magnitud x, o *sea* $\varepsilon_r = \varepsilon_a/x$. Para éste podremos aplicar lo dicho antes y acotar tal error. En el termómetro anterior, si hemos leído 20° C y la columna no llegaba a media división, el error absoluto máximo es menor que 0,5° C y el relativo máximo que 0,5/20 o sea que el 2,5 %.

Si el instrumento de medida tiene alguna deficiencia de construcción, o su calibrado es defectuoso, al medir con él cometeremos errores llamados *sistemáticos*. Pueden corregirse o aminorarse buscando o compensando la deficiencia o calibrando de nuevo el instrumento. Estos errores son desviaciones respecto al valor real en el mismo sentido y repitiendo cuidadosamente la medida hallaríamos, generalmente, el mismo valor. Si no da el mismo valor, no ganamos nada tomando la media aritmética de los valores hallados con el mismo instrumento. La medición puede realizarse con otro instrumento que, probablemente, no nos daría el error en el mismo sentido, o pueden utilizarse técnicas especiales, como la doble pesada, o la carga constante, en las balanzas. En estos errores hemos supuesto un observador perfecto que ha operado con sumo cuidado. Generalmente, no ocurre así y en una sucesión de medidas se obtienen valores que no coinciden a pesar de que el instrumento esté bien calibrado y no tenga defecto alguno. Se obtienen los llamados *errores accidentales*, que pueden variar en cada lectura o para cada observador. Al repetir las lecturas, se obtienen valores distintos que oscilan en torno a su valor medio. Realizadas n mediciones, hallamos el valor medio $x_m = \Sigma_i x_i/n$. La diferencia entre el valor medio x_m *y un valor cualquiera* x_i *nos da la desviación* $\delta_i = x_m - x_i$ que puede ser positiva o negativa. El error cuadrático medio es

$$\Delta x_c = \sqrt{\frac{\delta_i^2}{n(n-1)}}$$

Cuanto mayor sea el número de medidas, menor será dicho error. Como no sabemos el sentido del error, podemos escribir que el valor de la medida es $x = x_m \pm \Delta x_c$.

En muchas ocasiones no podemos medir directamente una magnitud y obtenemos su valor por cálculo después de haber medido otras magnitudes relacionadas con aquélla por medio de una expresión analítica o fórmula. Los valores obtenidos en las medidas pueden estar afectados de error y estos errores se propagan en las operaciones de cálculo. En toda medida indirecta tendremos una *propagación de error*.

Supongamos que la magnitud F sea función de las magnitudes expresadas por las variables independientes x, y, z; es decir, $F = f(x, y, z)$. Nosotros medimos x, y, z con cierto error y F la calculamos e introducimos un error ΔF. Sabemos que si una función depende de varias variables, su variación es

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F}{\partial z}\, dz$$

si consideramos que $dx = \varepsilon_x$, $dy = \varepsilon_y$, $dz = \varepsilon_z$ y tomamos las derivadas parciales en valor absoluto, el error absoluto máximo ΔF será

$$\varepsilon_{am} = \Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \varepsilon_x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \varepsilon_y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \varepsilon_z \qquad (1)$$

y el relativo máximo

$$\varepsilon_{rm} = \frac{\varepsilon_{am}}{F} = \frac{1}{F}\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \varepsilon_x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \varepsilon_y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \varepsilon_z\right]$$

que podemos escribir

$$\varepsilon_{rm} = \left|\frac{\partial}{\partial x} \ln F\right| \varepsilon_x + \left|\frac{\partial}{\partial y} \ln F\right| \varepsilon_y + \left|\frac{\partial}{\partial z} \ln F\right| \varepsilon_z \qquad (2)$$

Veamos unos ejemplos de propagación de errores en algunas operaciones básicas:

$F = x + y$ aplicando (1) $\varepsilon_a = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

y el relativo será $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/(x + y)$.

Sea

$F = xy$ aplicando (2), como $\ln F = \ln x + \ln y$,

$$\frac{\partial \ln F}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial \ln F}{\partial y} = \frac{1}{y} \quad \varepsilon_{rm} = \frac{\varepsilon_x}{x} + \frac{\varepsilon_y}{y}$$

Sea

$$F = x^n y^m \quad \ln F = n \ln x + m \ln y; \quad \frac{\partial \ln F}{\partial x} = \frac{n}{x} \quad \frac{\partial \ln F}{\partial y} = \frac{m}{y}$$

$$\varepsilon_{rm} = \frac{n\varepsilon_{rx}}{x} + \frac{m\varepsilon_{ry}}{y} = n\varepsilon_{rx} + m\varepsilon_{ry}$$

Antes hemos expuesto que los errores se sumaban para hallar el valor máximo y hemos tomado los valores absolutos. Si es posible que se compensen o neutralicen parcialmente los errores de las medidas aisladas, podemos aplicar la ley de propagación de errores de Gauss que dice: el error absoluto medio es

$$\overline{\Delta F} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\,\varepsilon_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\varepsilon_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\,\varepsilon_z\right)^2}$$

y el relativo medio

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\overline{\Delta F}}{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial x}\,\varepsilon_x\right)^2 + \left(\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial y}\,\varepsilon_y\right)^2 + \left(\frac{1}{F}\,\frac{\partial F}{\partial z}\,\varepsilon_z\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln F\,\varepsilon_x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\ln F\,\varepsilon_y\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\ln F\,\varepsilon_z\right)^2}$$

INICIACIÓN A LA FÍSICA

1

Cálculo vectorial

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales. En su afán por dar una descripción de los fenómenos lo más completa y concisa posible, el físico procura reducirla a la expresión de los resultados de las medidas de las distintas magnitudes físicas que intervengan en el fenómeno.

En el caso más sencillo, una magnitud física vendrá determinada por el ente matemático más simple: por un número. Si la magnitud varía, quedará determinada por los valores que toma una variable. Estas magnitudes que quedan determinadas por un solo número o variable, reciben el nombre de *escalares,* palabra que nos recuerda una escala; por ejemplo: la escala grabada sobre una probeta nos mide el volumen del líquido que contiene. El volumen es una magnitud escalar. Otros ejemplos de magnitudes escalares los constituyen el tiempo, la temperatura, la masa, etc.

Otras magnitudes físicas (tales como el desplazamiento de un punto, su velocidad, la aceleración, la fuerza, los campos eléctrico y magnético, etc.) no pueden determinarse con un solo número, sino que, además, llevan asociados una dirección y un sentido. Estas magnitudes son las llamadas *vectoriales,* y el ente matemático que las define recibe el nombre de *vector.*

1.2 Vector; componentes cartesianas. En un espacio de no más de tres dimensiones, definiremos el vector como un *segmento orientado,* es decir, un segmento rectilíneo que tiene especificada su longitud, su dirección y un orden de prelación entre los puntos que lo limitan. Así pues, llamando A y B a éstos, no será lo mismo el vector AB que el BA. La letra nombrada en primer lugar representa el *origen* del vector y la otra su *extremo.* La representación geométrica del vector prescinde frecuentemente de rotular el origen y el extremo

y coloca en éste una punta de flecha, denominando al vector por una letra única. En este libro, para representar un vector con una letra, ésta será del tipo negrita, por ejemplo: **V**; y cuando se quiera representar haciendo referencia a su origen y su extremo, se empleará la notación llamada de *diferencia de puntos,* consistente en escribir la letra (mayúscula cursiva) representativa del extremo seguida del signo — y luego la letra representativa del origen, por ejemplo: $B—A$.

La longitud del vector sirve para medir el número asociado a la magnitud vectorial representada y recibe el nombre de *módulo* del vector. Cuando el vector se representa por una letra única, su módulo puede representarse por dicha letra negrita entre barras: $|\mathbf{V}|$ o bien por la misma letra en cursiva V. Si el vector está representado como diferencia de puntos, bastará encerrar ésta entre barras verticales: $|B — A|$.

Es evidente que haciendo corresponder la dirección y sentido del vector a la dirección y sentido de la magnitud vectorial considerada, ésta encontrará en el vector una representación idónea.

El módulo, dirección y sentido de un vector pueden determinarse, en un espacio de tres dimensiones, por una terna de números; y por una pareja de números en el caso de que fueran sólo dos las dimensiones. Veamos cómo:

En el espacio de tres dimensiones (el de dos constituiría una simplificación al anular todo lo que correspondiera a una de las tres dimensiones) podemos considerar una terna de ejes coordenados cartesianos rectangulares $Oxyz$ de origen O. Consideremos el vector $\mathbf{A} = Q — P$ (fig. 1.1). Las coordenadas de P las designaremos por

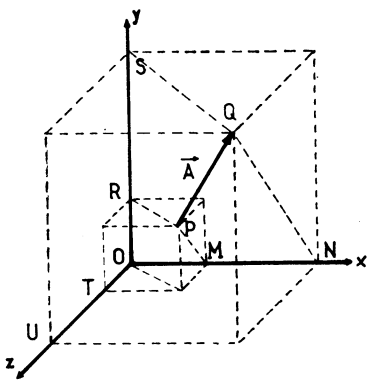


FIG. 1.1 Componentes cartesianas de un vector.

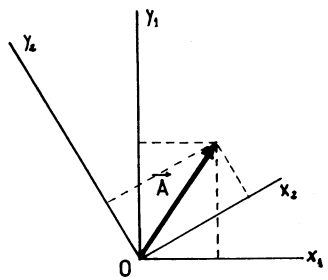


FIG. 1.2 Variación de las componentes ante un cambio de sistema de referencia.

x_P, y_P, z_P, y las de Q por x_Q, y_Q, z_Q. Proyectemos el vector sobre los tres ejes de coordenadas y obtendremos

$$\overline{MN} = x_Q - x_P \qquad \overline{RS} = y_Q - y_P \qquad \overline{TU} = z_Q - z_P$$

Estas proyecciones pueden ser positivas, nulas o negativas, según que el sustraendo en cada una de ellas sea menor, igual o mayor que el minuendo respectivo y reciben el nombre de *componentes cartesianas* del vector **A**. Aparece aquí una ventaja de la representación del vector como diferencia de puntos, pues sus componentes cartesianas resultan ser las diferencias de las coordenadas cartesianas del extremo y el origen. Las componentes cartesianas de **A** se representan por A_x, A_y y A_z y se tiene

$$A_x = x_Q - x_P \qquad A_y = y_Q - y_P \qquad A_z = z_Q - z_P$$

Llamando α, β y γ a los ángulos que forma el vector **A** con cada uno de los semiejes positivos de coordenadas, como las componentes son las proyecciones respectivas de **A**, será:

$$A_x = A \cos \alpha \qquad A_y = A \cos \beta \qquad A_z = A \cos \gamma \qquad (1.1)$$

Donde A es el módulo del vector. Elevándolas al cuadrado y sumándolas,

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

y como la suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta siempre vale la unidad,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1.2)$$

Con lo que tenemos el módulo del vector en función de sus componentes. Combinando las ecuaciones 1.1 y 1.2 tendríamos los cosenos directores del vector en función de sus componentes, con lo que el conocimiento de éstas vemos que nos permite determinar unívocamente el módulo, dirección y sentido del vector.

Por tanto, una magnitud vectorial podrá representarse indistintamente por el módulo, dirección y sentido de un vector, o por sus componentes cartesianas referidas a un cierto sistema de referencia. Ahora bien, estas componentes dependerán del sistema escogido. Por ejemplo: consideremos en un plano (espacio de dos dimensiones) un vector **A** referido a dos sistemas de ejes cartesianos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (fig. 1.2); sus componentes en uno y otro sistema son diferentes. Sin embargo, una magnitud vectorial física es un ente intrínseco que no puede depender del sistema de referencia utilizado. El hecho de que

sus componentes sí dependan, sólo significa que la descripción de un mismo fenómeno en dos sistemas de referencia distintos requiere dos formas distintas de expresión.*

1.3 Igualdad y suma de vectores. Vamos a establecer las bases del Álgebra Vectorial, pero será preciso indicar, ante todo, que desarrollaremos ésta prescindiendo de cuál sea la posición del origen de cada vector. Es más, para operar tomaremos los orígenes de los vectores donde nos convenga. Los vectores que no tienen precisado su origen, pudiendo ser éste uno cualquiera de los puntos del espacio, reciben el nombre de vectores *libres*. Démonos cuenta de que las ecuaciones 1.1 y 1.2 nos determinan un vector libre, pues de ellas pueden deducirse el módulo, dirección y sentido del vector, pero no la posición de su origen, que queda totalmente indeterminada.

Así pues, diremos que dos vectores son iguales cuando tengan, respectivamente, iguales módulo, dirección y sentido. Ello entraña que sus componentes homólogas, en un mismo sistema de referencia, sean iguales y recíprocamente.

Dados varios vectores **A, B, C,** ..., llamaremos vector *suma* de ellos y lo representaremos por

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots$$

al vector cuyo origen coincide con el del primer vector sumando y cuyo extremo coincide con el del último, cuando todos los vectores sumando se colocan uno a continuación de otro con sus direcciones, sentidos y módulos correspondientes (fig. 1.3).

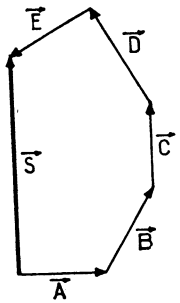


FIG. 1.3 Suma de vectores.

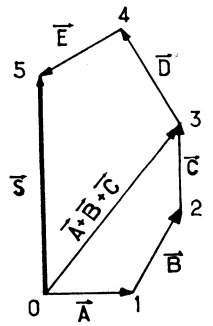


FIG. 1.4 Propiedad asociativa de la suma vectorial.

* Si se tradujera este libro a otro idioma, las palabras empleadas serían otras, pero los conceptos desarrollados serían los mismos.

La suma vectorial goza de las propiedades asociativa y conmutativa. En efecto: por la misma definición de suma, el vector de origen O y extremo el punto 3 (fig. 1.4) es la suma $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ de los tres primeros sumandos y vemos que al sumarla con los vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ se obtiene la misma suma. Luego: *En toda suma de vectores pueden sustituirse varios de ellos por su suma efectuada.*

Consideremos ahora la suma de vectores $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (fig. 1.5 *a*) y la suma $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ (fig. 1.5 *b*). Colocando las figuras con el punto O común, los vectores, que son dos a dos paralelos y de igual longitud, deter-

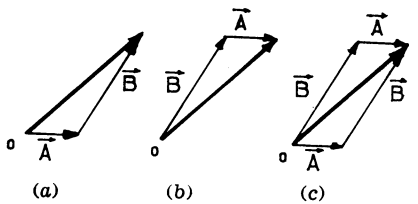


FIG. 1.5 Propiedad conmutativa de la suma de vectores y regla del paralelogramo.

minan un paralelogramo (fig. 1.5 *c*) en el cual los vectores $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ coinciden según una diagonal, luego $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (propiedad conmutativa).

De esta demostración sale la llamada *regla del paralelogramo* para la suma de dos vectores, según la cual basta colocarlos con su origen común y su suma viene dada por el vector definido por la diagonal del paralelogramo.

Los vectores de la figura 1.3 constituyen un polígono en el espacio (que no tiene por qué ser plano) y la Geometría nos enseña que al proyectar sobre un eje cualquiera una línea poligonal cerrada, la suma algebraica de las proyecciones (positivas unas, negativas otras) sobre el eje, es nula. De aquí resulta inmediato que la proyección del vector $\mathbf{S}$ sobre un eje cualquiera es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho eje de los demás vectores, luego:

La proyección sobre un eje cualquiera de un vector suma de otros varios es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho eje de los vectores sumando.

Aplicando esta propiedad a los ejes cartesianos, resulta que si

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots$$

se cumple

$$S_x = A_x + B_x + C_x + \ldots$$
$$S_y = A_y + B_y + C_y + \ldots$$
$$S_z = A_z + B_z + C_z + \ldots$$

Es decir: *Las componentes cartesianas de un vector suma de otros varios son iguales a las respectivas sumas algebraicas de las componentes homólogas de los vectores sumando.*

1.4 Vector opuesto de uno dado; diferencia de vectores. Dado un vector **A**, llamaremos *opuesto* de **A** a otro vector de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario. En consecuencia, al sumar un vector con su opuesto tendremos, según la definición de suma, un vector de módulo nulo. Éste, llamado *vector nulo*, tendrá, según las ecuaciones 1.1, nulas sus tres componentes cartesianas, y como éstas han de ser iguales a las sumas de las respectivas componentes homólogas de **A** y su opuesto, se deduce que las componentes homólogas de dos vectores opuestos son de igual valor absoluto y de signos contrarios. Por eso al vector opuesto de **A** se le suele representar por $-\mathbf{A}$, y sus componentes son $-A_x$, $-A_y$, $-A_z$.

Llamaremos *diferencia* de dos vectores a otro vector que sumado con el segundo nos dé el primero. Para obtenerla gráficamente bastará representar minuendo y sustraendo con sus orígenes coincidentes y trazar un vector cuyo origen sea el extremo del sustraendo y su extremo el del minuendo. Llamando **D** a la diferencia entre **A** y **B** tendremos

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

o sea

$$A_x = B_x + D_x$$
$$A_y = B_y + D_y$$
$$A_z = B_z + D_z$$

de aquí pueden despejarse las componentes de **D** que resultan ser iguales a las diferencias de las componentes homólogas de minuendo y sustraendo, pero como $-B_x$, $-B_y$ y $-B_z$ son las componentes del vector opuesto del **B**, se deduce que *para restar dos vectores basta sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.*

1.5 Producto de un escalar por un vector. El producto de un escalar α por un vector **A** lo definimos como otro vector de la misma dirección que **A**, cuyo módulo es igual al producto del módulo **A** por el valor absoluto de α, y cuyo sentido será el de **A** o el opuesto según que α sea positivo o negativo, respectivamente.

De la semejanza entre los triángulos *OPR* y *OQS*, *OTR* y *OUS* (fig. 1.6), resulta de manera inmediata que

$$(\alpha\,\mathbf{A})_x = \alpha\,A_x$$

y análogamente se obtendría

$$(\alpha \mathbf{A})_y = \alpha A_y \qquad (\alpha \mathbf{A})_z = \alpha A_z$$

En la figura 1.6 se ha representado el caso en que $\alpha > 0$. Si $\alpha < 0$, los triángulos considerados estarían opuestos por su vértice en *O*, pero la semejanza subsistiría. Entonces, por el convenio de signos para las componentes (diferencia entre las coordenadas homólogas del extremo y del origen, las de éste son nulas), **A** y α **A** tendrían sus componentes homólogas de signos contrarios. Luego siempre: *Las componentes del producto de un escalar por un vector son iguales a las componentes homólogas del vector multiplicadas por el escalar,* sea éste positivo o negativo.

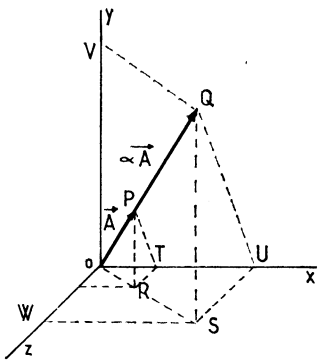


FIG. 1.6 Producto de un escalar por un vector

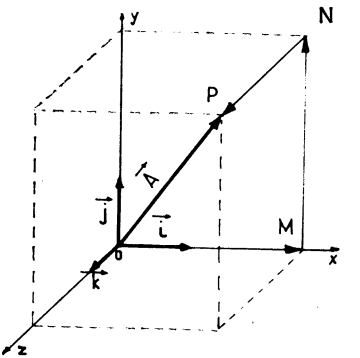


FIG. 1.7 Obtención de un vector en función de los versores de los ejes cartesianos.

1.6 Versores; expresión de un vector en función de los versores de los ejes cartesianos. Cuando queramos asignar un sentido positivo a un eje, bastará asociarle un vector que tenga la misma dirección. El sentido del vector será el que se tome como positivo sobre el eje. El módulo del vector nada tendrá que ver en esto. Si sobre el eje tomamos una escala, la unidad en ésta puede venir medida por el módulo del vector asociado, al que se llama *versor.* Así pues, un versor será un vector de módulo unidad (también se le llama vector unitario) que caracteriza una dirección y un sentido.

Si multiplicamos un versor por un escalar, tendremos un vector de igual dirección, cuyo módulo es igual al valor absoluto del escalar.

Los versores asociados a los ejes cartesianos suelen representarse por **i**, **j** y **k**. Así pues, si multiplicamos **i** por el escalar A_x, compo-

nente x del vector **A** (fig. 1.7), tendremos el vector $A_x\,\mathbf{i} = M - O$. Por otra parte, el vector $A_y\,\mathbf{j}$ se podría representar por $N - M$, y el $A_z\,\mathbf{k}$ por $P - N$. La suma de los tres nos daría el vector $A = P - O$, con lo cual puede escribirse

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k} \tag{1.3}$$

que nos da el vector **A** en función de sus componentes cartesianas y de los versores asociados a los ejes cartesianos correspondientes.

1.7 Producto escalar de dos vectores. El producto escalar de dos vectores **A** y **B** lo representaremos por $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y se define como una cantidad escalar igual al producto de los módulos de los vectores multiplicado por el coseno del ángulo que forman. Así pues,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\,B\cos\,\theta \tag{1.4}$$

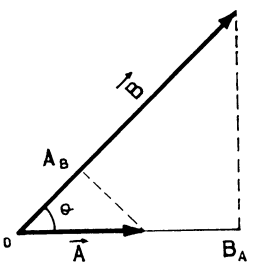


FIG. 1.8 Producto escalar de dos vectores.

Ahora bien, la proyección de **B** sobre **A** es (fig. 1.8)

$$B_A = B\cos\,\theta \tag{1.5}$$

y la proyección de **A** sobre **B** es

$$A_B = A\cos\,\theta \tag{1.6}$$

considerando dichas proyecciones negativas cuando caigan sobre la prolongación del otro vector, es decir, cuando $\theta > 90°$. En tal caso, sustituyendo las ecuaciones 1.5 y 1.6 en la 1.4, tenemos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\,B_A = B\,A_B \tag{1.7}$$

Luego, teniendo en cuenta el signo de la proyección: *El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Resulta inmediato que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. *La anulación del producto escalar es condición característica de perpendicularidad.*

De la ecuación 1.7 resulta inmediatamente que el producto escalar goza de la propiedad conmutativa, es decir,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

También goza de la propiedad distributiva. En efecto: el producto escalar

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\,(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots)_A \tag{1.8}$$

pero la proyección sobre **A** de un vector suma de otros varios sabemos (§ 1.3) que es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre **A** de los vectores sumando. Luego, sustituyendo en la ecuación 1.8

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\,(B_A + C_A + \ldots)$$

pero esto es el producto del escalar A por una suma de escalares, el cual ya sabemos que es distributivo, luego

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ldots) = A\,B_A + A\,C_A + \ldots = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \ldots$$

que nos demuestra que *para multiplicar escalarmente un vector por una suma de vectores, basta sumar los productos escalares de dicho vector por cada uno de los vectores sumando* (propiedad distributiva).

Esto hace que podamos extender al producto escalar las reglas del Álgebra ordinaria. Dejamos como ejercicio demostrar que, siendo α un escalar,

$$(\alpha\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \alpha\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\alpha\,\mathbf{B})$$

Expresemos los vectores **A** y **B** en función de sus componentes y multipliquémoslos escalarmente

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k})\cdot(B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}) \tag{1.9}$$

podemos multiplicar estos dos trinomios según las reglas del Álgebra ordinaria, teniendo en cuenta que se trata de productos escalares. Entonces aparecerán términos en los que se multiplicarán escalarmente vectores perpendiculares (por ej.: $A_x\,\mathbf{i}\cdot B_y\,\mathbf{j}$) y dichos productos serán nulos; y aparecerán otros términos en que se multiplicarán vectores de igual dirección (por ej.: $A_x\,\mathbf{i}\cdot B_x\,\mathbf{i}$), y como entonces $\cos\theta = \pm 1$, quedará sólo el producto de las componentes correspondientes (con el signo que proceda). Por tanto, la ecuación 1.9 quedará en la forma

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z \tag{1.10}$$

1.8 Producto vectorial de dos vectores. Definimos el producto vectorial de dos vectores como otro vector expresado de la manera siguiente:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

El significado de esta definición es inmediato si se piensa que al desarrollar el determinante por los elementos de la primera fila queda una suma de productos de cada versor por sendos escalares, los cuales serán las componentes correspondientes del vector $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$.

De la definición dada por la ecuación 1.11 se deducen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A} \tag{1.12}$$

pues al permutar dos filas, el determinante sólo cambia de signo.

Siendo c un escalar,

$$(c\,\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} = c\,(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge (c\,\mathbf{B}) \tag{1.13}$$

En efecto:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c\,A_x & c\,A_y & c\,A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ c\,B_x & c\,B_y & c\,B_z \end{vmatrix}$$

Propiedad distributiva:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{C}$$

ya que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

El producto vectorial de dos vectores paralelos es siempre nulo. En efecto: si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos,

$$\mathbf{B} = c\,\mathbf{A}$$

y

$$B_x = c\,A_x \qquad B_y = c\,A_y \qquad B_z = c\,A_z$$

con lo que las dos últimas filas del determinante de la ecuación 1.11 tendrán sus elementos proporcionales y el determinante es nulo.

Así,

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0 \tag{1.14}$$

y es fácil demostrar que

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{1.15}$$

Combinando los productos escalar y vectorial podemos estudiar el *producto mixto* $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$. Las componentes de $(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ son los adjuntos de **i**, **j** y **k** en el determinante

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta la ecuación 1.10, queda

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = A_x \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

y este segundo miembro no es más que el desarrollo por los elementos de la primera fila del determinante

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

Análogamente,

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

y este determinante es igual al de la ecuación 1.16, pues a él se reduce al permutar la primera fila con las otras dos. Luego

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \tag{1.17}$$

Dejamos como ejercicio al lector demostrar que también se cumplen las propiedades siguientes:

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{1.18}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{1.19}$$

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = 1 \tag{1.20}$$

Por último, veamos una propiedad geométrica: Sean los vectores **A** y **B** cuyo origen común tomaremos como origen de coordenadas y tomemos como eje *Ox* la recta soporte de **A**, siendo su sentido positivo el del vector **A**. Como eje *Oy* tomaremos uno perpendicular a *Ox* situado en el plano determinado por los vectores **A** y **B** y el eje *Oz* será el perpendicular a ambos y su sentido positivo será el correspondiente a un triedro dextrogiro.

Descompongamos el vector **B** en dos vectores (fig. 1.9) dirigidos según los ejes *Ox* y *Oy* ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$). Entonces

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_2$$

El primer término del segundo miembro es nulo por ser **A** y $\mathbf{B}_1$ de igual dirección, con lo cual

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\,A\,B_y \tag{1.21}$$

Es decir, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es un vector de igual dirección que **k** y su sentido dependerá del signo de B_y. Esto equivale a decir que $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es normal al plano determinado por los vectores **A** y **B** y está dirigido en

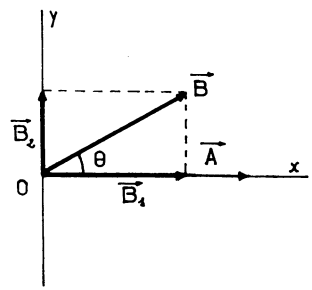


FIG. 1.9 Producto vectorial.

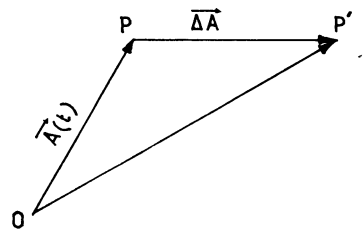


FIG. 1.10 Vector función de un escalar.

el sentido que avanzaría un sacacorchos que girase de manera de llevar el multiplicando sobre el multiplicador por el camino más corto. En cuanto al módulo de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, lo podemos deducir facilmente: de la ecuación 1.21 resulta que

$$|\,\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\,| = |\,A\,B_y\,| = A\,B\ \text{sen}\ \theta$$

resultado independiente del sistema de ejes elegido y que nos indica que el módulo de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ es igual al área del paralelogramo determinado por **A** y **B** como lados del mismo.

1.9 Vector función de un escalar. Cuando las componentes de un vector **A** sean funciones de un escalar t, diremos que el vector **A** es función del escalar t, y lo simbolizaremos escribiendo $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$.

Si las componentes son funciones uniformes del escalar t, a cada valor de éste corresponderá un módulo, una dirección y un sentido. Si, además, son funciones continuas, al variar t variarán con continuidad el módulo y dirección del vector.

Considerando invariable el origen O del vector (fig. 1.10), su extremo variará al variar el escalar, correspondiendo al valor t de éste una posición P de aquél y al valor $t + \Delta t$ otra posición P'. Esto es lo mismo que decir que al valor $t + \Delta t$ del escalar corresponde un vector $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$. El incremento $\Delta\mathbf{A}$ del vector será, claro está, el vector $P' - P$. Por tanto, las componentes de éste serán las diferencias entre las coordenadas homólogas de P' y P (cfr. § 1.2), que no son sino los incrementos ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z sufridos por las componentes de **A** al variar el escalar de t a $t + \Delta t$.

Es interesante señalar que el módulo A del vector habrá sufrido un incremento $\Delta|\mathbf{A}|$ igual a la diferencia entre las longitudes de los lados OP' y OP del triángulo de la figura 1.10. En cambio, el módulo de $\Delta\mathbf{A}$ es la longitud del tercer lado, que será mayor que la diferencia de los otros dos (salvo cuando no cambie de dirección el vector), por lo que, en general, $|\Delta\mathbf{A}| \neq \Delta|\mathbf{A}|$.

1.10 Derivada de un vector. Si multiplicamos ahora el escalar $1/\Delta t$ por el vector $\Delta\mathbf{A}$ tendremos otro vector de igual dirección y cuyo módulo es $|\Delta\mathbf{A}|/\Delta t$.* Sus componentes serán (cfr. § 1.5):

$$\frac{\Delta A_x}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta A_z}{\Delta t}$$

A este vector se le llama cociente incremental de $\mathbf{A}(t)$ en el intervalo entre t y $t + \Delta t$.

Haciendo tender a cero Δt, el vector $P' - O$ tenderá al $P - O$ describiendo su extremo una cierta curva $P'P''P'''P$ (fig. 1.11) y el vector cociente incremental que pasa siempre por P, siendo secante a la curva antedicha, tenderá a un vector límite tangente en P a dicha

* Se entiende, tomado en valor absoluto.

curva. Este vector límite es la derivada del vector **A** y lo representaremos por $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$.

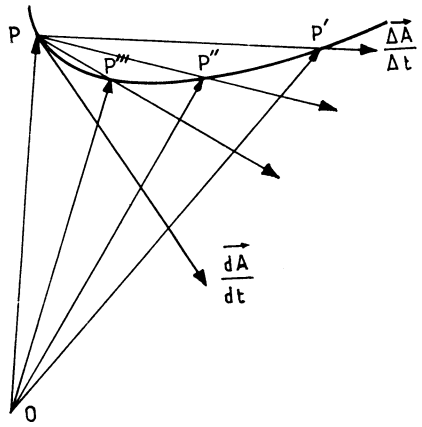


FIG. 1.11 Derivada de un vector.

Sus componentes serán los límites a que tienden las componentes del vector cociente incremental, es decir, las derivadas de las componentes de **A**:

$$\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}$$

Su módulo será (cfr. ec. 1.2) la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estas componentes, y, por lo dicho al final del § 1.9, no será la derivada del módulo más que en el caso en que el vector varíe sin cambiar su dirección.

Si las componentes del vector derivada son, a su vez, funciones de t continuas y derivables, existirá el vector derivada segunda de $\mathbf{A}(t)$ respecto a t, y así sucesivamente para las derivadas de orden superior.

Dejamos como ejercicio extender al caso de la derivación vectorial las reglas de la derivación ordinaria.

De especial interés es el caso

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})}{\mathrm{d}t} = 2\,\mathbf{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}$$

cuando **A** tiene módulo constante. Como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 =$ constante, su derivada es nula y resulta

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

La anulación de este producto escalar exige que sea nulo uno de los dos vectores o que, no siéndolo, sean perpendiculares. Como $\mathbf{A} \neq 0$, se deduce que *la derivada de un vector de módulo constante es perpendicular a dicho vector o nula.*

1.11 Integral de un vector. Llamaremos integral de un vector **A** función de un escalar t a otro vector cuyas componentes cartesianas sean respectivamente iguales a las integrales de A_x, A_y y A_z. Como la integral de cada componente queda definida salvo una constante arbitraria aditiva, la integral de un vector quedará definida salvo un vector constante aditivo.

2

Vectores deslizantes

2.1 Tipos de vectores. Los vectores estudiados hasta ahora son segmentos orientados cuyo origen o punto de aplicación puede ser uno cualquiera del espacio y por ello reciben el nombre de vectores *libres*. En cambio, si fijamos el punto de aplicación, tendremos lo que se llama un vector *fijo* o *aplicado*. Numerosos son los ejemplos de vectores fijos que se presentan en Mecánica, pero aparecen también otros entes físicos que pueden representarse por un segmento orientado que no tiene fijo su punto de aplicación pero que lo tiene constreñido a la recta soporte del vector, pudiendo ser uno cualquiera de sus puntos. Al vector se le llama *deslizante*, y al ente físico representado, *cursor*.

2.2 Momento de un vector respecto a un punto. Consideremos un vector fijo **A** aplicado en P. El momento de **A** respecto al punto O lo definiremos como un vector *aplicado* en O dado por

$$\mathbf{M} = (P - O) \wedge \mathbf{A} \tag{2.1}$$

Ya se sabe que las operaciones vectoriales se efectúan con vectores libres, por lo que los vectores de esta ecuación serán vectores libres equipolentes (de igual módulo, dirección y sentido) a los vectores fijos considerados. El resultado ya se especifica que ha de estar *aplicado* en O.

La ecuación 2.1 indica que el momento de **A** respecto a O será un vector normal al plano determinado por el vector y el punto, dirigido en el sentido de avance de un sacacorchos que colocado en O girase en el sentido indicado por **A** y cuyo módulo es igual al doble del área del triángulo determinado por **A** como base y O como vértice opuesto (cfr. § 1.8).

Si el vector **A** lo consideráramos aplicado a otro punto P' cual-

quiera de la recta soporte de **A**, obtendríamos (fig. 2.1) un momento de la misma dirección y sentido que **M**, pero, además, su módulo también sería el mismo, pues el nuevo triángulo tendría la misma base A y la misma altura OH; luego la definición dada de momento de un vector aplicado puede generalizarse al *momento de un vector deslizante*. En cambio, el momento de un vector libre no está determinado.

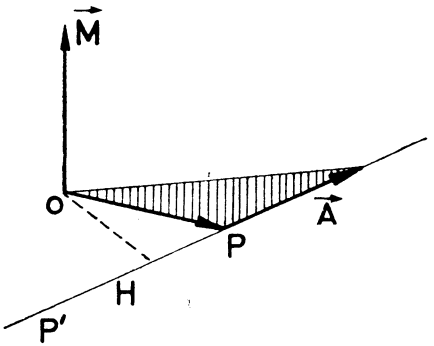


FIG. 2.1 Momento de un vector respecto a un punto.

Resulta evidente que el momento de un vector respecto a un punto cualquiera de su recta soporte es siempre nulo.

El momento de un vector respecto a un punto depende, claro está, de la posición relativa del vector y el punto. Veamos en qué forma varía el momento al pasar de un punto O a otro O'. Representando por **M** al momento de **A** respecto a O y por **M'** al momento de **A** respecto a O',

$$\mathbf{M} = (P - O) \wedge \mathbf{A} \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{M}' = (P - O') \wedge \mathbf{A}$$

Pero

$$P - O' = (P - O) + (O - O')$$

luego

$$\mathbf{M}' = [(P - O) + (O - O')] \wedge \mathbf{A}$$

y en virtud de la propiedad distributiva

$$\mathbf{M}' = (P - O) \wedge \mathbf{A} + (O - O') \wedge \mathbf{A}$$

o lo que es igual, teniendo en cuenta la ecuación 2.1,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + (O - O') \wedge \mathbf{A} \qquad (2.2)$$

Esta igualdad puede interpretarse diciendo que el momento de un vector respecto a un punto O' es igual a la suma de su momento respecto a otro punto O más el momento respecto a O' de un vector equipolente aplicado a O.

De la propiedad distributiva del producto vectorial y de la definición de momento resulta inmediatamente el teorema de Varignon que dice que *el momento respecto a un punto cualquiera de la suma de varios vectores concurrentes es igual a la suma de los momentos respecto a dicho punto de los vectores sumando.*

2.3. Momento de un vector respecto a un eje. Consideremos un eje E al que asignamos un vector unitario $\mathbf{u}$, lo cual supone fijar un sentido positivo convencional en dicho eje. Si es $\mathbf{M}$ el momento de un vector $\mathbf{A}$ respecto a un punto O del eje y $\mathbf{M}'$ el momento del mismo vector respecto a otro punto O' de E, vamos a demostrar que cualesquiera que sean O y O' sobre el eje,

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{M}'\cdot\mathbf{u} \tag{2.3}$$

En efecto: multiplicando escalarmente por $\mathbf{u}$ los dos miembros de la ecuación 2.2 tenemos

$$\mathbf{M}'\cdot\mathbf{u} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{u} + (O - O')\wedge\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}$$

Pero el segundo término del segundo miembro es nulo por serlo el producto escalar de dos vectores perpendiculares, ya que $O - O'$ y $\mathbf{u}$ tienen la misma dirección, por lo que queda demostrada la ecuación 2.3.

El producto escalar $\mathbf{M}\cdot\mathbf{u}$ no es más que la proyección de $\mathbf{M}$ sobre el eje, por ser igual al producto del módulo de $\mathbf{u}$ por la proyección de $\mathbf{M}$ sobre él y será positivo o negativo según que el ángulo que forme $\mathbf{M}$ con el sentido positivo del eje E sea agudo u obtuso, respectivamente. Luego la ecuación 2.3 significa que la proyección sobre un eje E del momento de un vector $\mathbf{A}$ respecto a un punto cualquiera de dicho eje, es siempre la misma. A dicha proyección se le llama *momento del vector* $\mathbf{A}$ *respecto al eje* E, y vemos que es un escalar.

Cuando el vector $\mathbf{A}$ y el eje E sean coplanarios, $\mathbf{M}$ será normal a este plano y su proyección sobre E será nula. Luego: *el momento de un vector respecto a un eje coplanario con él es siempre nulo.*

Habida cuenta de que la proyección sobre un eje de un vector suma de otros varios es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho eje de los vectores sumando (cfr. § 1.3), resulta, en virtud del teorema de Varignon, que *el momento respecto a un eje de la*

suma de varios vectores concurrentes es igual a la suma algebraica de los momentos respecto a dicho eje de los vectores sumando.

De aquí resulta que si descomponemos (fig. 2.2) un vector **A** en suma de dos, uno $\mathbf{A}_e$ paralelo a un eje E y otro $\mathbf{A}_\pi$ proyección sobre un plano π normal al eje, tendremos que la suma de los momentos respecto al eje E de $\mathbf{A}_e$ y $\mathbf{A}_\pi$ será igual al momento de **A** respecto a E, y como el momento de $\mathbf{A}_e$ respecto al eje es nulo por ser coplanarios, *el momento de* **A** *respecto al eje* E *será igual al momento respecto al eje del vector* $\mathbf{A}_\pi$ *proyección ortogonal del* **A** *sobre un plano normal al eje.*

2.4 Componentes de un vector deslizante. Consideremos ahora los momentos de un vector deslizante **A** (fig. 1.1) respecto a los ejes de coordenadas. Para determinarlos comenzaremos tomando el momento **M** de **A** respecto al origen de coordenadas O que es punto común a los tres ejes. El momento de **A** respecto a uno cualquiera de los tres ejes es, por definición, la proyección de **M** sobre dicho eje. Supongamos ahora aplicado el vector **A** en el punto P de coordenadas x, y, z. Los momentos de **A** respecto a los ejes de coordenadas son, respectivamente, M_x, M_y, M_z, cuyas expresiones son

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \mathbf{i}\cdot(P-O)\wedge\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = y\,A_z - z\,A_y \\ M_y &= \mathbf{j}\cdot(P-O)\wedge\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = z\,A_x - x\,A_z \\ M_z &= \mathbf{k}\cdot(P-O)\wedge\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = x\,A_y - y\,A_x \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Por la propia definición de momento (ec. 2.1) resulta que **A** y **M** son perpendiculares, luego

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{A} = 0 \quad \text{o sea} \quad M_x A_x + M_y A_y + M_z A_z = 0 \qquad (2.5)$$

El problema que queremos resolver es el de calcular las coordenadas x, y, z, del punto de aplicación del vector **A** conocidas sus componentes cartesianas A_x, A_y, A_z y sus momentos M_x, M_y, M_z respecto a los ejes de coordenadas. Es decir, resolver el sistema de ecuacio-

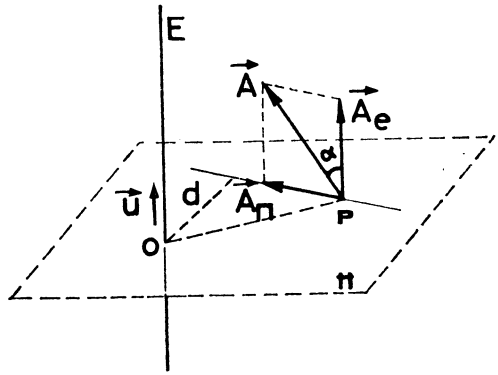


FIG. 2.2 Momento de un vector respecto a un eje.

nes 2.4, donde las únicas incógnitas son x, y, z. La discusión de dicho sistema presenta la particularidad de que la matriz de los coeficientes de las incógnitas tiene característica 2 y que en virtud de la ecuación 2.5 dicha matriz ampliada con los términos independientes también tiene característica 2, por lo que el sistema tiene solución, la cual puede escribirse en la forma.

$$\frac{x+a}{A_x} = \frac{y-b}{A_y} = \frac{z}{A_z} \qquad (a = M_y/A_z \quad b = M_x/A_z)$$

que son las ecuaciones de una recta en el espacio, cuyos cosenos directores son proporcionales a A_x, A_y, A_z, es decir: es paralela al vector **A**. Como el punto de aplicación de **A** puede ser uno cualquiera de los infinitos puntos de esta recta, el vector **A** es deslizante y queda determinado cuando se conocen cinco de las cantidades A_x, A_y, A_z, M_x, M_y, M_z, pues la sexta se obtiene de la ecuación 2.5. A estas seis cantidades se les da el nombre de *componentes del vector deslizante.*

2.5 Sistemas de vectores deslizantes. Dado un sistema de vectores deslizantes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_N$ se llama *resultante general* del sistema a un vector libre **R** igual a la suma de los vectores libres equipolentes a $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_N$, y se llama *momento resultante* del sistema respecto a un punto O a un vector **M** aplicado en O, suma de los momentos respecto a O de los vectores deslizantes que constituyen el sistema. Al punto O se le da el nombre de *polo* o *centro de reducción* del sistema.

Las componentes de la resultante general y las del momento resultante constituyen un conjunto de seis cantidades a las que se da el nombre de *componentes del sistema de vectores deslizantes.*

Llamando $\mathbf{M}_i$ al momento del vector $\mathbf{A}_i$ respecto al punto O y $\mathbf{M}'_i$ al momento del mismo vector respecto a otro punto O', la ecuación 2.2 nos dice que

$$\mathbf{M}'_i = \mathbf{M}_i + (O - O') \wedge \mathbf{A}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

Sumando estas N igualdades tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}'_i = \Sigma \mathbf{M}_i + (O - O') \wedge \Sigma \mathbf{A}_i$$

es decir,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + (O - O') \wedge \mathbf{R} \tag{2.6}$$

donde $\mathbf{M}'$ es el momento resultante del sistema respecto al punto O' y vemos en la ecuación 2.6 que *el momento resultante respecto al polo O' es la suma del momento resultante respecto a O y el momento respecto a O' de la resultante general del sistema supuesta aplicada en O.*

Advertimos que el momento respecto a un punto es un vector aplicado en dicho punto y que las operaciones de la ecuación 2.6, como todas las operaciones, se realizan siempre con vectores libres equipolentes a los considerados. El resultado se considera luego aplicado en O'.

De la ecuación 2.6 resulta que para $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$, y recíprocamente: si $\mathbf{M}'$ debe coincidir con $\mathbf{M}$ cualquiera que sea O', deberá ser $(O - O') \wedge \mathbf{R} = 0$ cualquiera que sea O', y como en tal caso el vector $O - O'$ no puede ser siempre nulo o paralelo a $\mathbf{R}$, deberá forzosamente ser $\mathbf{R} = 0$.

Así pues, *siempre que un sistema tenga resultante general nula, y sólo en este caso, el momento resultante es independiente del centro de reducción.* Todo sistema de resultante general nula recibe el nombre de *par.*

2.6 Trinomio invariante. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{R}$ los dos miembros de la ecuación 2.6 queda

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} + (O - O') \wedge \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$$

y el producto mixto será nulo por ser $\mathbf{R}$ perpendicular a $(O - O') \wedge \mathbf{R}$. Luego: *el producto escalar de la resultante general por el momento resultante es el mismo para todos los puntos del espacio,* su valor

puede representarse por T, y expresado en función de las componentes se tiene el llamado *trinomio invariante*

$$T = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z$$

que no tiene por qué ser nulo como en el caso de un vector único.

También puede escribirse

$$T = M R \cos (\mathbf{M}; \mathbf{R})$$

y como **R** es también invariante, si el sistema no es un par podremos dividir por R y

$$\frac{T}{R} = M \cos (\mathbf{M}; \mathbf{R}) \tag{2.7}$$

El primer miembro es, naturalmente, invariante y el segundo es la proyección sobre la dirección de **R** del momento resultante respecto a un punto cualquiera del espacio que será, pues, invariante.

2.7 Eje central. Si los puntos O y O' determinan una recta paralela a la resultante general, el segundo término del segundo miembro de la ecuación 2.6 será nulo, con lo que *el momento resultante de un sistema de vectores es el mismo para todos los puntos de cualquier recta paralela a la resultante general.*

Vamos ahora a buscar el lugar geométrico de los puntos en los cuales el momento resultante es paralelo a la resultante general. Sea O un punto en el cual el momento resultante **M** sea paralelo a **R** y busquemos la posición de otro punto O' en el cual el momento resultante **M'** sea también paralelo a **R**. La ecuación 2.6 nos relaciona estos momentos, y como el segundo término del segundo miembro es perpendicular a **R**, a menos que sea nulo, nos daría un momento **M'** que sería la suma de un vector **M** paralelo a **R** con otro perpendicular a él y **M'** no podría ser de igual dirección que **R**. Por tanto, el segundo término del segundo miembro deberá ser nulo y ello sólo ocurre en los puntos de una recta que pase por O y tenga la dirección de **R**. Luego *el lugar geométrico de los puntos en donde el momento resultante tiene la misma dirección que la resultante general es una recta única, llamada* eje central, *paralela a* **R**. Por consiguiente, en virtud de la propiedad demostrada al principio de este apartado, en todos los puntos del eje central tendremos el mismo momento resultante.

Vamos a ver que éste es el de módulo mínimo. En efecto: como la dirección de **M** y **R** es la misma, formarán 0° o 180° y el coseno

del ángulo que forman valdrá ± 1. Pero la ecuación 2.7 nos dice que el producto $M \cos (\mathbf{M}; \mathbf{R})$ tiene el mismo valor en todos los puntos del espacio, luego en aquellos en donde el coseno tenga valor absoluto máximo, M deberá ser mínimo; luego de la ecuación 2.7 deducimos

$$M_{\min} = \frac{|T|}{R} \tag{2.8}$$

Luego: *el eje central es el lugar geométrico de los puntos a los que corresponde un momento resultante mínimo.* De la ecuación 2.8 se deduce que cuando sea nulo el trinomio invariante, también lo será el momento mínimo.

Para determinar el eje central bastará conocer uno de sus puntos, pues su dirección ya sabemos que es la de la resultante general **R**. Podemos localizar un punto del eje central de la manera siguiente: llamemos O al origen de coordenadas (no tiene por qué estar sobre el eje central) y sea $O'(x, y, z)$ el pie de la perpendicular trazada desde O al eje.

Multiplicando vectorialmente por **R** los dos miembros de la ecuación 2.6 se tiene

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}' = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M} + \mathbf{R} \wedge [(O - O') \wedge \mathbf{R}]$$

El primer miembro ha de ser nulo, pues los dos vectores son paralelos por pertenecer O' al eje central, y aplicando la ecuación 1.18 al segundo miembro queda

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M} + (O - O') R^2 - \mathbf{R} [(O - O') \cdot \mathbf{R}]$$

Como el eje central tiene la dirección de **R** y $O - O'$ le es perpendicular, será nulo el producto escalar del último término y queda

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M} + (O - O') R^2$$

de donde

$$O' - O = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}}{R^2} \tag{2.9}$$

El primer miembro de la ecuación 2.9 es el vector de posición del punto O' del eje central, que queda así determinado si se conocen la resultante general y el momento resultante respecto al origen de coordenadas. Las componentes de $O' - O$ son, claro está, las coordenadas de O'.

2.8 Reducción de un sistema de vectores deslizantes. Se dice que dos sistemas de vectores deslizantes son *equivalentes* cuando tienen la misma resultante general y el mismo momento resultante respecto a un punto dado *O*. La ecuación 2.6 hace, en tal caso, que se verifique la igualdad entre los momentos respecto a cualquier otro punto.

Según esto, varios vectores concurrentes en un punto constituyen, en virtud del teorema de Varignon, un sistema equivalente a su resultante aplicada en dicho punto o en cualquiera de los de la recta obtenida deslizando dicha resultante.

Si el sistema es un par, fácil es ver que será equivalente a dos vectores de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario, que estén situados en un plano normal al momento resultante, tales que el producto de su módulo por la distancia entre sus rectas soporte sea igual al módulo del momento resultante y dirigidos de manera que la rotación que señalen hiciera avanzar un sacacorchos en el sentido del momento resultante.

Un sistema en el cual $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} = 0$, se dice que es *equivalente a cero* y, evidentemente, al añadir a un sistema otro equivalente a cero, tendremos un sistema equivalente al primero. Ejemplo: dos vectores directamente opuestos, es decir, de igual módulo y recta soporte pero de sentidos contrarios, constituyen un sistema equivalente a cero.

Reducir un sistema de vectores es hallar otro sistema equivalente más sencillo. Es posible demostrar que la reducción de sistemas puede realizarse mediante las llamadas operaciones elementales, las cuales llevan siempre de un sistema a otro equivalente. Dichas operaciones son:

a) La composición de vectores concurrentes o descomposición de un vector en varios concurrentes.

b) La adición o supresión de dos vectores directamente opuestos.

Para la reducción de sistemas resultan de gran utilidad los sigientes teoremas:

1.° *Todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a un vector deslizante cuya recta soporte pase por un punto O arbitrario y a un par (vector y par pueden ser, eventualmente, nulos).*

En efecto: si es **R** la resultante general y **M** el momento resultante respecto a *O*, dicho sistema sería equivalente al constituido por un vector equipolente a **R** que pase por *O* y un par cuyo momento sea **M**, pues la resultante general de este segundo sistema también sería **R**, ya que el par tiene contribución nula a la resultante general

y el momento resultante respecto a O sería la suma del momento del vector mencionado (que es nulo por pasar por O) más el momento del par (que es **M** para todos los puntos). El par puede reducirse a dos vectores **A** y **B** (fig. 2.3), en donde **A** pasa por O. Componiendo **A**

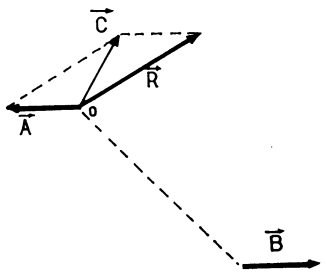


FIG. 2.3 Reducción de un sistema a dos vectores.

con **R** nos da un vector **C** que pasa por O y el sistema primitivo se reduce a los vectores **B** y **C**. Esto demuestra el teorema:

2.° *Todo sistema puede reducirse a otro que contenga, como máximo, dos vectores.*

3.° *Un vector y un par coplanarios (es decir, que el momento del par es perpendicular al vector) equivalen a un vector único, y recíprocamente, un vector único equivale a otro equipolente que pase por un punto arbitrario y a un par.*

En efecto: sea **A** el vector y **M** el momento del par. El momento resultante respecto a un punto de la recta soporte de **A** es **M**, y por ser perpendiculares, $T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = 0$, y el momento mínimo del sistema total será nulo (ec. 2.8), y un vector deslizante único equipolente a **A** y soportado por el eje central del sistema equivaldrá al sistema primitivo, por coincidir sus resultantes generales y también el momento resultante respecto a un punto cualquiera del eje central.

Recíprocamente: dado un vector único **A**, hagamos pasar por un punto O cualquiera un vector equipolente a **A** y su opuesto. Éste, con el primero, constituye un par y el equipolente queda aplicado en O, como queríamos demostrar. El momento del par coincide, claro está, con el momento de **A** respecto a O.

4.° *Todo sistema de vectores equivale a un vector único y a un par cuyo momento es paralelo al vector único.*

Basta aplicar el teorema 1.° tomando como punto arbitrario uno del eje central del sistema. En determinados casos, el vector o el par pueden ser nulos. Si los vectores son coplanarios, todos los mo-

mentos respecto a un punto del plano son normales a éste, en cuyo caso el trinomio invariante es nulo y el momento mínimo (ec. 2.8) también (salvo si el sistema fuera un par, pues entonces $\mathbf{R} = 0$), con lo que desaparece el par y sólo queda el vector. Así pues, podemos enunciar el teorema:

5.° *Todo sistema de vectores coplanarios equivale a un vector único, a menos que sea un par.*

En el caso en que $T \neq 0$, el teorema 4.° nos define un sistema llamado *torsor,* en el cual el vector y el momento del par pueden ser del mismo sentido (torsor positivo) o de sentidos opuestos (torsor negativo). Podríamos materializar el par con dos vectores de módulos iguales al del tercer vector. La separación entre los dos vectores del par se llama, en este caso, *flecha* del torsor, y representándola por δ se tiene:

$$M_{\min} = R\,\delta$$

Sustituyendo en ésta la ecuación 2.8 resulta

$$\delta = \frac{|T|}{R^2}$$

Si $T = 0$ no hay torsor, pues puede ocurrir que

$$R = 0 \begin{cases} M = 0 & \text{y el sistema es equivalente a cero} \\ M \neq 0 & \text{y el sistema es un par} \end{cases}$$

$$R \neq 0 \begin{cases} M = 0 & \text{en un punto que será del eje central por ser mínimo el momento, pero, por ser nulo, el sistema se reduce a un } \textit{vector único}. \\ \mathbf{M} \perp \mathbf{R} & \text{en puntos que no son del eje central, pero en éste el momento es nulo, pues } T = 0 \text{ y el sistema equivale a un } \textit{vector único} \text{ soportado por el eje central.} \end{cases}$$

2.9 Centro de vectores paralelos. Un caso particularmente interesante de un sistema de vectores es el siguiente: consideremos un conjunto de puntos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ y asociémosles, respectivamente, los valores $m_1, m_2, \ldots, m_N$ de un escalar cumpliéndose la condición $m = \Sigma\, m_i \neq 0$. Los vectores $m_1\,\mathbf{g}, m_2\,\mathbf{g}, \ldots, m_N\,\mathbf{g}$ que pasen, respectivamente, por $P_1, P_2, \ldots, P_N$ constituyen un sistema de vectores paralelos al $\mathbf{g}$. Su resultante general será $\mathbf{R} = \sum_i m_i\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{g}$, y el mo-

mento resultante respecto a un punto O que tomaremos como origen será

$$\mathbf{M} = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{g}$$

que en virtud de la ecuación 1.13 y de la propiedad distributiva del producto vectorial es

$$\mathbf{M} = \left[\sum_i m_i (P_i - O)\right] \wedge \mathbf{g} \tag{2.10}$$

$\sum_i m_i (P_i - O)$ es una suma de vectores concurrentes en O (fig. 2.4) y por tanto será otro vector que pasa por O que podremos poner en la forma

$$\sum_i m_i (P_i - O) = m (G - O) \tag{2.11}$$

y sustituyéndola en la ecuación 2.10 da

$$\mathbf{M} = m (G - O) \wedge \mathbf{g} = (G - O) \wedge m \mathbf{g} = (G - O) \wedge \mathbf{R}$$

Luego el vector $\mathbf{R}$ que pase por el punto G equivale al sistema de vectores paralelos, pues es equipolente a su resultante general y su momento respecto a O coincide con el momento resultante del sistema.

Al punto G definido por la ecuación 2.11 se le llama *centro de vectores paralelos* y vemos que su posición no depende para nada de la dirección de $\mathbf{g}$. Sus coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ pueden obtenerse proyectando sobre los tres ejes los vectores de la ecuación 2.11, resultando

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \tag{2.12}$$

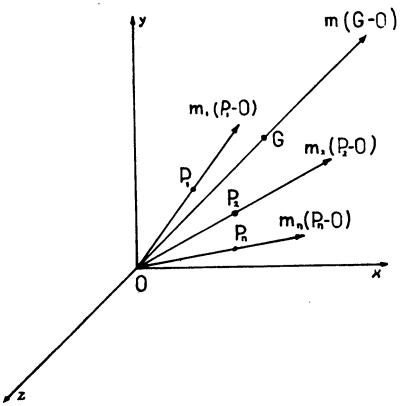


FIG. 2.4 El centro de vectores paralelos es el punto G.

3

Campos y potencial

3.1 Campos escalares y campos vectoriales. Consideremos una región del espacio en la que podamos definir una función uniforme de las coordenadas de posición tal que a cada punto de dicha región corresponda un número, medida de una magnitud física determinada. Dicha región del espacio recibe el nombre de *campo escalar.*

Múltiples son los ejemplos que pueden citarse de campos escalares. La presión atmosférica es un escalar que en cada punto de la atmósfera terrestre tiene un valor y sólo uno, en cada instante. También la temperatura se distribuye por la atmósfera constituyendo un campo escalar, así como la densidad en los distintos puntos de un astro.

El campo escalar viene determinado, según hemos dicho, por una función uniforme $U = U(x, y, z)$. Al hacer un cambio de coordenadas, la función representativa del campo escalar será otra $f(x', y', z')$. Como el campo escalar es un ente *intrínseco,* no deberá identificarse con la función que lo representa en un determinado sistema de referencia, sino que deberemos considerar que dicha función sólo constituye una descripción en tal sistema del campo escalar considerado (cfr. final de § 1.2).

Se llama *superficie equiescalar* o *isoescalar* al lugar geométrico de los puntos en que el escalar toma el mismo valor. La ecuación de una superficie equiescalar será, pues,

$$U(x, y, z) = \text{constante}$$

Si a cada punto de una región del espacio podemos hacer corresponder un vector que mida una magnitud vectorial, diremos que existe un *campo vectorial.* En el espacio ordinario de tres dimensiones, esto equivale a hacer corresponder a cada punto de coordenadas

x, y, z, en la región considerada, una terna de números $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$, que son las componentes del vector campo $\mathbf{A}(x, y, z)$. Dichas componentes variarán también ante un cambio de coordenadas, pero, como ya se indicó en § 1.2, ello no entraña variación alguna del ente intrínseco que es la magnitud vectorial representada.

En un campo de vectores, llamaremos *líneas de fuerza* o de campo a las líneas tales que, en cada uno de sus puntos, el vector campo está dirigido según la tangente.

También hay abundancia de ejemplos de campos vectoriales. A cada punto del espacio que rodea la Tierra corresponde un valor de la aceleración de la gravedad, lo cual constituye un *campo de aceleraciones*. En torno a un conductor cargado existe un *campo eléctrico*. En los distintos puntos del espacio recorrido por una corriente fluida estacionaria existe un *campo de velocidades*, etc.

3.2 Circulación de un vector a lo largo de un camino. Dado un camino en un campo de vectores **A**, asignémosle un sentido de recorrido y dividámoslo en elementos de camino, es decir, en tramos de longitud infinitesimal dl, asimilables a vectores $\mathbf{dl}$ de módulo igual a la longitud del tramo, dirección la definida por éste y sentido el asignado para el recorrido.

Llamaremos *circulación elemental* del vector campo **A** al producto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{dl}$, que, por su propia definición, será igual al producto de la longitud del elemento de camino por la proyección de **A** sobre la tangente a la curva, o bien al producto del módulo de **A** por la proyección sobre él del elemento de camino. El signo será positivo o negativo según que los vectores formen ángulo agudo u obtuso. Así pues, a cada tramo elemental del camino MPN considerado (fig. 3.1) le corresponderá una circulación elemental y la suma de las correspondientes a todos los elementos de camino comprendidos entre los puntos M y N recibe el nombre de *circulación del vector* **A** a lo largo del camino finito MPN y la representaremos por

$$C = \int_{MPN} \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl} \tag{3.1}$$

El valor de esta suma dependerá de las posiciones de los puntos M y N y en general del camino que los une, a lo largo del cual calculamos la circulación.

Si el campo de vectores fuera el resultado de sumar vectorialmente varios campos componentes, de la definición de circulación y

de la propiedad distributiva del producto escalar resulta que *la circulación del vector campo resultante es igual a la suma de las circulaciones de los campos componentes.*

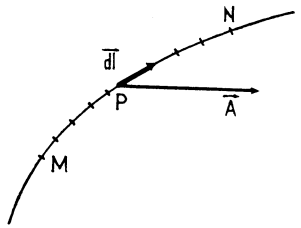


FIG. 3.1 Circulación de un vector a lo largo de un camino.

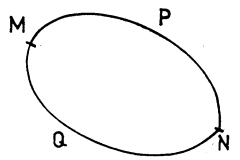


FIG. 3.2

3.3 Potencial. Consideremos ahora un campo **A** de características tales que su circulación a lo largo de un camino cerrado cualquiera *MPNQM* (fig. 3.2) sea nula. A tal campo se le llama *conservativo.* Ahora bien, dicha circulación será la suma de las circulaciones elementales correspondientes a todos los elementos de camino en que podamos descomponer la curva cerrada *MPNQM,* y como podemos asociar por una parte las correspondientes a los elementos que integran el tramo *MPN* y por otra las correspondientes al tramo *NQM,* podremos escribir

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{MPN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{NQM} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad (3.2)$$

donde el primer miembro representa la circulación a lo largo de la curva cerrada.

Ahora bien, si invirtiéramos el sentido de la circulación en el tramo *NQM* tendríamos

$$\int_{NQM} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{MQN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad (3.3)$$

pues ello equivale a invertir el sentido de todos los dl en dicho tramo, con lo que cambiaría el signo de la circulación en todos sus elementos, y sustituyendo la ecuación 3.3 en la 3.2, teniendo en cuenta que el primer miembro de la ecuación 3.2 es nulo por hipótesis, queda

$$0 = \int_{MPN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} - \int_{MQN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

o sea

$$\int_{MPN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_{MQN} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

Se comprende que tendríamos el mismo valor para la circulación a lo largo de otro camino $MQ'N$ cualquiera que uniese M con N, pues con el MPN formaría una curva cerrada, luego: *Si un campo es conservativo, la circulación entre dos puntos M y N cualesquiera sólo depende de la posición de éstos y no del camino que los una.*

A este valor de la circulación entre M y N le llamaremos *diferencia de potencial* (ddp) V_{MN} entre los puntos M y N.

Tomemos un punto de referencia O y hagamos pasar por M, N y O un camino cerrado. Como el campo es conservativo, la circulación será nula y tendremos

$$V_{MN} + V_{NO} + V_{OM} = 0$$

o sea

$$V_{MN} = -V_{OM} - V_{NO} = V_{MO} - V_{NO} \tag{3.4}$$

Definamos ahora en todos los puntos del campo una función $V(x, y, z)$ llamada *potencial* tal que en cada punto tome un valor igual a la diferencia de potencial entre dicho punto y el punto O de referencia. Es decir, el potencial en M sería $V_M = V_{MO}$; en N, $V_N = V_{NO}$, y la ecuación 3.4 quedaría en la forma

$$V_{MN} = V_M - V_N = -(V_N - V_M) \tag{3.5}$$

El primer miembro es la circulación del vector **A** al pasar de M a N y vemos que *es igual al incremento, cambiado de signo, que sufre el potencial al pasar del punto M al N.*

Esta definición nos hace ver que el potencial, a diferencia de la ddp, no queda unívocamente determinado más que en el caso en que se fije su valor en un punto (por ejemplo, dando el valor cero al potencial del punto O de referencia). Así, si conociéramos una función $V(x, y, z)$ que satisficiera la ecuación 3.5, también la satisfaría otra función $U = V(x, y, z) + C$, donde C es una constante, ya que también

$$V_{MN} = U_M - U_N$$

pues ello equivale a sumar una misma constante a minuendo y sustraendo. El valor que se dé a dicha constante aditiva fijará la posición de los puntos de potencial nulo.

Si tuviéramos varios campos conservativos y eligiéramos un punto

en el cual se anulen todos los potenciales (basta dar el valor conveniente a las distintas constantes aditivas), el campo resultante de sumar vectorialmente los campos dados también sería conservativo y *su potencial sería igual a la suma de los potenciales de los campos componentes.* Ello resulta inmediato de la definición de potencial y de lo dicho al final del § 3.2.

3.4 Superficies equipotenciales. Fijado un origen de potenciales, a cada punto del campo corresponderá un valor del potencial, con lo que tendremos definido un campo escalar y las superficies equiescalares correspondientes reciben el nombre de *superficies equipotenciales.* Por cada punto del campo, pues, pasará una superficie equipotencial (y sólo una) a la que corresponde el valor del potencial en dicho punto.

El vector campo ha de ser normal, en todos los puntos, a la superficie equipotencial correspondiente. En efecto: si no lo fuera, tomando un camino contenido en dicha superficie la circulación no sería nula y entre dos puntos de una misma superficie equipotencial habría una ddp no nula, lo cual está en contra de la definición de superficie equipotencial. En cambio, al ser **A** normal en todos los puntos a la superficie, sería siempre perpendicular a **dl** y el producto escalar sería siempre nulo y nula la circulación, o sea la ddp.

En todos los puntos, *el campo está dirigido en el sentido de los potenciales decrecientes.* En efecto: consideremos dos superficies equipotenciales que pasen por dos puntos próximos M y N, representadas

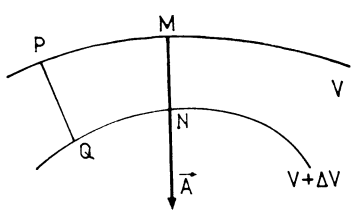


FIG. 3.3 El campo es normal a las superficies equipotenciales y está dirigido hacia los potenciales más bajos.

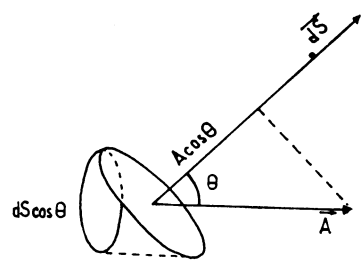


FIG. 3.4 Flujo elemental.

en la figura 3.3 por sus trazas en el plano del papel. El campo **A** en M será poco diferente que en N y su circulación de M a N será positiva por ser del mismo sentido los vectores **A** y $N - M$, ya que suponemos situado N sobre la normal en M a la superficie equipotencial. Ahora

bien, según vimos en § 3.3, dicha circulación es de signo contrario al incremento ΔV del potencial, luego $\Delta V < 0$ y en consecuencia **A** está dirigido hacia los potenciales más bajos.

La circulación entre M y N, por ser igual en valor absoluto a la ddp ΔV, será también igual a la circulación entre P y Q que están más separados y situados sobre la normal en P a la superficie equipotencial V. La igualdad de las circulaciones obliga a que **A** sea menor, en módulo, a lo largo del trayecto mayor, de donde se desprende que el campo será más intenso en las regiones en donde estén más apretadas las superficies equipotenciales. La variación del potencial por unidad de longitud a lo largo de la normal a una superficie equipotencial recibe el nombre de *gradiente* del potencial, y cuanto mayor sea en valor absoluto, tanto mayor será el módulo del vector campo **A**, pues tanto más apretadas estarán las superficies equipotenciales.

3.5 Flujo de un vector a través de una superficie. Consideremos una superficie S situada en un campo vectorial y asignémosle un sentido positivo a la normal a la superficie en cada punto. Ello equivale a llamar positiva a una cara de la superficie y negativa a la otra, considerando como positivo el sentido de la normal que atraviesa la superficie de la cara negativa a la positiva.

Descompongamos la superficie S en elementos de superficie dS y hagamos corresponder (fig. 3.4) a cada uno de ellos un vector $d\mathbf{S}$ normal a él, de sentido el de la normal positiva y cuyo módulo sea igual al área dS del elemento.

Llamaremos flujo elemental $d\Phi$ del vector **A** a través del elemento de superficie dS al producto escalar $d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$. De esta definición resulta que el flujo elemental es igual al producto del área del elemento de superficie por la componente normal de **A**. O también (fig. 3.4) al producto del módulo de **A** por el área de la proyección, sobre un plano normal a él, del elemento de superficie.

Sumando ahora los flujos a través de todos los elementos en que se ha descompuesto la superficie finita S tendremos el *flujo total* a través de la superficie S.

Cuando los vectores **A** y $d\mathbf{S}$ formen ángulo agudo, diremos que se trata de un *flujo saliente* a través de la superficie, y como el producto escalar de dos vectores que forman ángulo agudo es positivo, el flujo saliente llevará el signo +. En cambio, cuando **A** y $d\mathbf{S}$ formen ángulo obtuso, diremos que se trata de un *flujo entrante* y llevará el signo —.

3.6 Campos centrales. Todo campo caracterizado por el hecho de que, en cada punto, el vector campo correspondiente está dirigido hacia un punto fijo *O*, llamado centro del campo, y su módulo sólo depende de la distancia r entre el punto considerado y el centro del campo, recibe el nombre de *campo central*. Estudiemos su circulación.

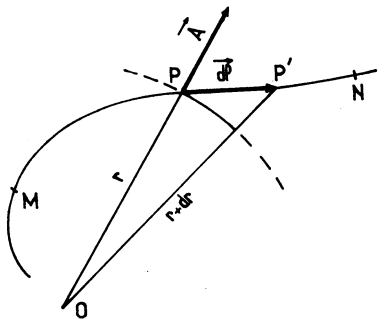


FIG. 3.5 Campo central.

En la figura 3.5 vemos que la proyección de dl sobre **A** es igual al incremento dr de la distancia del punto genérico al centro *O*. Como el módulo de **A** es una función $f(r)$ a la que ni siquiera es necesario imponerle la condición de continuidad, pues basta que sea integrable, la circulación elemental será

$$d\Gamma = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = f(r)\, dr$$

pues el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos, $f(r)$, por la proyección del otro sobre él, dr. La circulación elemental dΓ no es sino el incremento de una función $\Gamma(r)$ al pasar de un punto situado a distancia r a otro *cualquiera* que se halle a una distancia $r + dr$. Por tanto, al calcular la circulación de *M* a *N* no hacemos sino sumar los incrementos que sufre $\Gamma(r)$; la suma de los incrementos es el incremento total, o sea la diferencia entre los valores que toma $\Gamma(r)$ en *N* y en *M*, luego sólo dependerá de la posición de estos puntos, pero no del camino seguido para ir de uno a otro. De aquí resulta que *los campos centrales son conservativos*.

El potencial correspondiente sólo dependerá, claro está, de r y, por la propia definición de potencial, será

$$V(r) = -\int f(r)\, dr + C \qquad (3.6)$$

y como V sólo varía con r, las superficies equipotenciales serán aquellas para las cuales $r =$ constante, es decir, superficies esféricas con centro en O.

En todos los puntos de una misma superficie equipotencial **A** es normal y su módulo tiene el mismo valor $A = f(r)$. El flujo elemental será $A\,dS$ y el flujo que atraviesa una superficie esférica de centro en O será

$$\Phi = \int_S A\,dS = A\int_S dS = A(4\pi r^2) \tag{3.7}$$

3.7 Campo newtoniano. Llamaremos *campo newtoniano* a todo campo central en el que se cumple

$$A = f(r) = \frac{c}{r^2} \tag{3.8}$$

al escalar c le llamaremos *masa agente* situada en el centro O y diremos que es la creadora del campo. Si $c > 0$, el campo tendrá el sentido de alejamiento de O, y el opuesto si $c < 0$.

Por ser central, el campo es conservativo y, según la ecuación 3.6, su potencial será

$$V = -\int \frac{c}{r^2}\,dr + C = \frac{c}{r} + C$$

Si fijamos el cero de potencial en los puntos infinitamente alejados, la constante C deberá ser nula y tendremos

$$V = \frac{c}{r} \tag{3.9}$$

Por extensión, llamaremos campo newtoniano a todo campo de vectores que resulta de sumar vectorialmente varios campos newtonianos creados por distintas masas agentes c_1, c_2, ... situadas en puntos diferentes. Así, el potencial creado en un punto P por masas agentes $c_1, c_2, \ldots, c_N$, situadas en puntos a distancias $r_1, r_2, \ldots, r_N$ de P, respectivamente, será, en virtud de lo dicho al final del § 3.3,

$$V = \sum \frac{c_i}{r} \tag{3.10}$$

si para todos los campos componentes se toma en el infinito el cero de potenciales.

3.8 Teorema de Gauss. Consideremos un campo newtoniano creado por una masa agente c situada en un punto O (fig. 3.6). A una distancia r de O existe un elemento de superficie dS cuya orientación

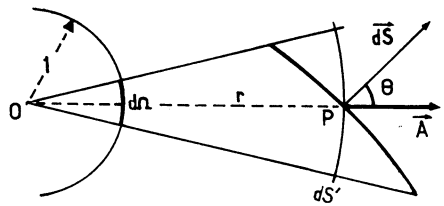


FIG. 3.6 Flujo elemental y ángulo sólido.

y área vienen determinadas por el vector $d\mathbf{S}$ que forma un ángulo θ con el campo $\mathbf{A}$ en el punto P del elemento de superficie. El flujo a través de dS será

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A\, dS\, \cos\, \theta$$

Ahora bien, $dS \cos \theta$ será el área dS' de la proyección sobre un plano normal a $\mathbf{A}$ del elemento de superficie, por lo que $d\Phi$ será, teniendo en cuenta la ecuación 3.8,

$$d\Phi = \frac{c}{r^2} dS' \tag{3.11}$$

Trazando con centro en O una superficie esférica de radio unidad, el cono de vértice en O que contiene el contorno de dS y dS' determina sobre dicha superficie esférica un área $d\Omega$ que es el *ángulo sólido* del cono. Esta superficie es concéntrica con la dS' y sus áreas son proporcionales a los cuadrados de los radios, luego

$$\frac{d\Omega}{dS'} = \frac{1}{r^2}$$

y despejando de aquí dS' y sustituyendo en la ecuación 3.11 tenemos

$$d\Phi = c\, d\Omega \tag{3.12}$$

donde $d\Omega$ se considera positivo si desde O se ve la cara negativa (cfr. § 3.5) de dS.

Consideremos ahora una superficie cerrada en cuyo interior se encuentra O (fig. 3.7). Toda semirrecta trazada desde O corta a dicha superficie en un número impar de puntos, por lo que un cono ele-

mental de vértice O determinará sobre la superficie un número impar de elementos a los que corresponderán ángulos sólidos de igual valor absoluto, pero dos a dos de signos opuestos por verse desde O una vez la cara + y otra la —. Por tanto, la suma de los flujos será igual al flujo a través del elemento desaparejado.

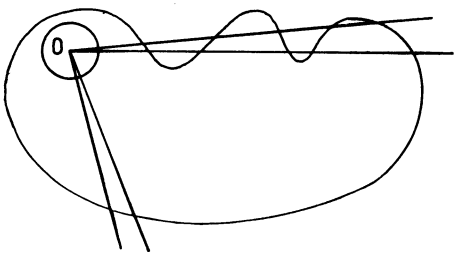


FIG. 3.7 Flujo a través de una superficie cerrada debido a una masa agente interior.

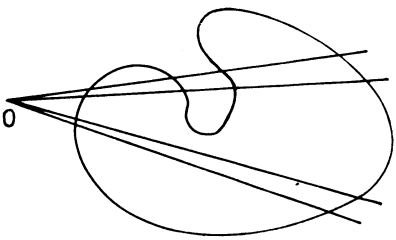


FIG. 3.8 El flujo a través de un superficie cerrada debido a una masa agente exterior es nulo.

Al sumar los flujos a través de todos los elementos que integran la superficie cerrada, lo cual hacemos «paseando» el cono por toda ella, la suma de los términos definidos por la ecuación 3.12 nos dará el flujo total

$$\Phi = c \Sigma \, d\Omega$$

pero la suma $\Sigma \, d\Omega$ nos dará el área de una superficie esférica de radio unidad, es decir, 4π. Luego

$$\Phi = 4\pi c \tag{3.13}$$

En cambio, si el punto O fuera exterior a la superficie cerrada (*fig. 3.8*), una semirrecta trazada desde O corta a la superficie en un número par de puntos y un cono elemental de vértice O determinará sobre la superficie un número par de elementos superficiales a los que corresponderán ángulos sólidos de igual valor absoluto, pero dos a dos de signos opuestos, por lo que la suma de los flujos correspondientes será nula. Al sumar, como antes, los flujos a través de todos los elementos que integran la superficie cerrada tendremos, pues, un flujo total nulo. De aquí se desprende que *el flujo a través de una superficie cerrada debido a una masa agente exterior es siempre nulo.*

Calculemos ahora el flujo elemental a través de dS creado por varias masas agentes c_1, c_2, ... (dos en fig. 3.9) que crean en P los campos $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ... Estos campos dan un campo resultante

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots$$

y el flujo será

$$d\Phi = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots)\cdot d\mathbf{S}$$

que en virtud de la propiedad distributiva del producto escalar será

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + \ldots$$

donde $d\Phi_i$ es el flujo del campo creado por la masa agente c_i a través de la superficie dS.

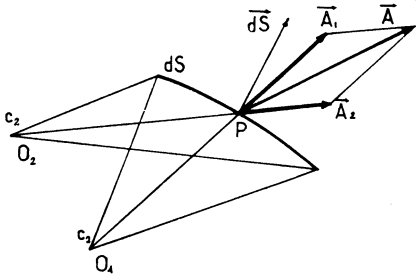


FIG. 3.9 Flujo elemental debido a dos masas agentes.

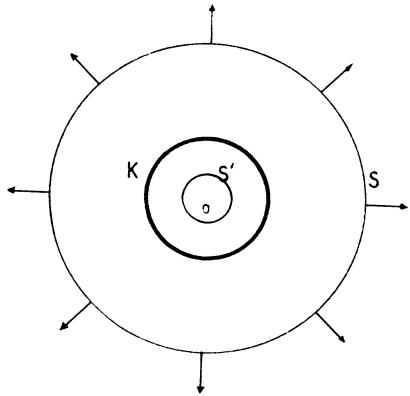


FIG. 3.10 Campo creado por una capa esférica.

Resulta inmediato, pues, que el flujo a través de una superficie cerrada debido a varias masas agentes c_1, c_2, ... será igual a la suma de los flujos que cada una de ellas crearía por sí sola. De entre dichas masas agentes, unas serán exteriores a la superficie cerrada y su contribución será nula; las otras serán interiores y cada una contribuirá con un flujo dado por la ecuación 3.13. El flujo total será, pues,

$$\Phi = 4\pi \Sigma c_i \qquad (3.14)$$

o sea: *El flujo saliente creado por un sistema de masas agentes a través de una superficie cerrada es igual al producto de* 4π *por la suma algebraica de las masas agentes existentes en su interior* (teorema de Gauss).

3.9. Campo creado por una capa esférica. Consideremos ahora que las masas agentes se distribuyen uniformemente formando una capa esférica K (fig. 3.10). La simetría del sistema hará que el campo

creado presente simetría en torno al centro O de la capa. Será, pues, un campo central y su flujo a través de la superficie esférica S de radio r valdrá, según la ecuación 3.7,

$$\Phi = A(4\pi r^2) \tag{3.7}$$

donde A es el módulo del campo en los puntos a distancia r del centro O.

Ahora bien, si llamamos c a la masa agente total de la capa K, el teorema de Gauss nos dice que

$$\Phi = 4\pi c$$

e igualando esta ecuación con la 3.7 se tiene

$$A = \frac{c}{r^2}$$

que comparada con la ecuación 3.8 nos dice que *en los puntos exteriores a la capa K el campo es el mismo que se tendría si toda la masa agente estuviera concentrada en su centro.*

Consideremos ahora una superficie esférica S' concéntrica con la capa K y de radio inferior. La simetría del sistema sigue abonando la validez de la ecuación 3.7 para el flujo a través de S', pero el teorema de Gauss nos dice que $\Phi = 0$ por ser nula la masa agente interior a S'. Luego, para que ello sea posible, debe ser $A = 0$. Es decir: *El campo creado por una capa homogénea de masas agentes en un punto interior es siempre nulo.*

Si queremos conocer la distribución del potencial creado por la capa K, como en los puntos exteriores a ella el campo que deriva de dicho potencial coincide con el que crearía en dichos puntos la masa agente supuesta concentrada en el centro, también deberán coincidir las distribuciones de potencial correspondientes, y considerando nulo el potencial en el infinito, su expresión para los puntos *exteriores a K* será la dada por la ecuación 3.9.

En los puntos interiores a la capa K, como el campo es nulo, también lo será su circulación entre dos cualesquiera de ellos, y por tanto será nula la diferencia de potencial. Es decir, todos los puntos *interiores* a la capa tendrán el mismo valor del potencial.

3.10 Campo creado por una distribución con simetría esférica. Supongamos ahora la masa agente distribuida con continuidad por todo el volumen de una esfera de radio a y centro O pudiendo variar la densidad (masa agente por unidad de volumen) de unos puntos

a otros, pero de manera que pueda descomponerse la esfera en capas concéntricas homogéneas.

El campo creado en un punto *exterior* a la esfera será el resultante de componer los campos debidos a las distintas capas. Cada uno de ellos es el mismo que se tendría si estuviera concentrada en el centro la masa agente de la capa correspondiente, luego el campo resultante será igual al que se tendría si estuviera concentrada en el centro la masa agente total.

Si el punto fuera *interior* a la esfera, se hallará a una distancia del centro $r < a$; las capas de radio superior a r no contribuirán al campo y sólo contribuirán las más internas, por lo cual el campo será el que crearía en dicho punto una masa agente igual a la de la esfera de radio r al concentrarla en el centro O.

4

Cinemática del punto

Los capítulos anteriores se han podido seguir empleando conceptos puramente matemáticos. Todo cuanto se ha visto en ellos será de utilidad para describir fenómenos físicos muy diversos y debemos considerar lo aprendido como herramientas que nos servirán para trabajar en Física. No obstante, no se ha vertido aún ningún concepto físico.

La primera magnitud física que vamos a introducir es el *tiempo*, magnitud escalar cuyo significado es obvio y que, combinado con la magnitud vectorial geométrica llamada *desplazamiento* nos facilitará la descripción de los movimientos. La parte de la Física que trata de la descripción de los movimientos recibe el nombre de Cinemática y en ella no intervienen las causas de aquéllos.

4.1 Movimiento de un punto; vector de posición. Consideremos un punto móvil M que se mueve por el espacio. Para especificar su posición en un instante cualquiera, convendrá tomar un sistema de referencia que puede consistir en una terna $Oxyz$ de ejes coordenados cartesianos rectangulares. Como el punto M es móvil, sus coordenadas variarán con el tiempo y serán

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{4.1}$$

a cada valor del parámetro t corresponderá una terna de valores x-y-z, y las ecuaciones 4.1, llamadas ecuaciones del movimiento, serán las ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio llamada *trayectoria*, que es el lugar geométrico de las posiciones del punto M. Eliminando entre ellas el parámetro t encontraríamos dos ecuaciones en x-y-z que nos determinarían también la trayectoria.

Conocida ésta, podríamos tomar en ella un punto A de referen-

cia (fig. 4.1) y establecer un sistema de abscisas curvilíneas s_1, s_2, ..., s, ... haciendo corresponder a cada punto de la trayectoria un número igual a la longitud del arco que delimita con A. Si es M móvil, su abscisa curvilínea s variará con el tiempo y será $s = s(t)$ la ecuación del movimiento sobre la trayectoria.

La posición de M en el espacio viene determinada por el *vector de posición* $M - O$ cuyas componentes son las dadas por las ecuaciones 4.1. Así pues, el vector de posición será función del escalar tiempo.* En ocasiones, el vector de posición suele representarse por **r**.

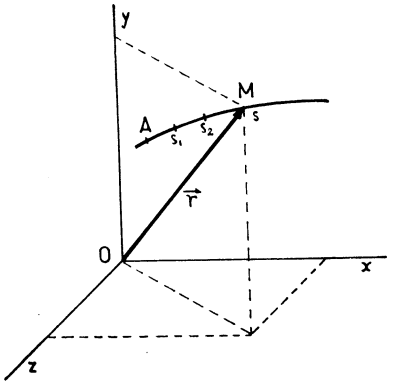


FIG. 4.1 Trayectoria y vector de posición.

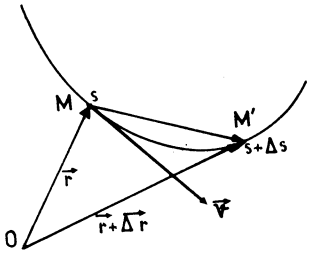


FIG. 4.2 Velocidad.

4.2. Velocidad. Si suponemos que las funciones 4.1 son continuas y derivables, el vector de posición admitirá un vector derivada (confrontar § 1.10) al cual llamamos *velocidad* del punto M. El módulo de este vector recibe el nombre de *celeridad*. Así pues, *la velocidad de un punto es la derivada de su vector de posición respecto al tiempo* y por tanto es un vector. Lo representaremos por **v** y tendremos

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dr}}{dt} \tag{4.2}$$

La curva determinada por el extremo del vector $M - O$ es la trayectoria, y como la derivada de $M - O$ es tangente a dicha curva (cfr. § 1.10), **v** será tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos. Por otra parte, el módulo del vector derivada será el límite

* Repásese el § 1.9.

al cual tienda el módulo del cociente incremental al tender a cero Δt. En el caso actual,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|M' - M|}{|\Delta t|} \tag{4.3}$$

pero, en el límite, el arco y la cuerda son equivalentes. Como a M' corresponde una abscisa curvilínea $s + \Delta s$ y a M corresponde s, la longitud del arco será Δs, y teniendo en cuenta la equivalencia podremos escribir la ecuación 4.3 de la manera siguiente

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|M' - M|}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{4.4}$$

de donde resulta que *la celeridad es la derivada del espacio respecto al tiempo.*

En la ecuación 4.4 hemos suprimido el símbolo de módulo al final, porque si $\Delta t < 0$, significaría que se pasaba de un instante a otro anterior, es decir, de M' a M, con lo que también cambia el signo del numerador. Ello significa que el sentido de la velocidad es el de avance del punto M. Por tanto: *la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en cada punto, dirigido en el sentido del avance, y cuyo módulo es igual a la derivada del espacio respecto al tiempo.*

Sus componentes cartesianas se obtendrán derivando respecto al tiempo las ecuaciones 4.1 que nos dan las componentes cartesianas del vector de posición, y escribiremos

$$v_x = \dot{x}(t) \qquad v_y = \dot{y}(t) \qquad v_z = \dot{z}(t) \tag{4.5}$$

donde el punto indica derivación respecto al tiempo.

4.3 Aceleración. Como el vector velocidad es función del escalar tiempo, a su derivada le llamaremos *aceleración,* la representaremos por **a** y tendremos:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{4.6}$$

Sus componentes cartesianas se obtendrán derivando respecto al tiempo las componentes de la velocidad y tendremos:

$$a_x = \ddot{x}(t) \qquad a_y = \ddot{y}(t) \qquad a_z = \ddot{z}(t) \tag{4.7}$$

En el instante t, la posición del móvil es M y su velocidad **v**; en el instante t' son M' y **v'**, etc. (fig. 4.3). Tomemos un punto O cual-

quiera y tracemos desde él vectores $H - O$, $H' - O$, etc., equipolentes a v, v', etc., es decir, las velocidades en los distintos instantes tienen sus equipolentes todos con origen en O. Los puntos H, H', etc. determinan una curva llamada *hodógrafa* del movimiento. Comparando la hodógrafa de la figura 4.3 con la curva $P'\,P''\,P'''\,P$ de la figura 1.11

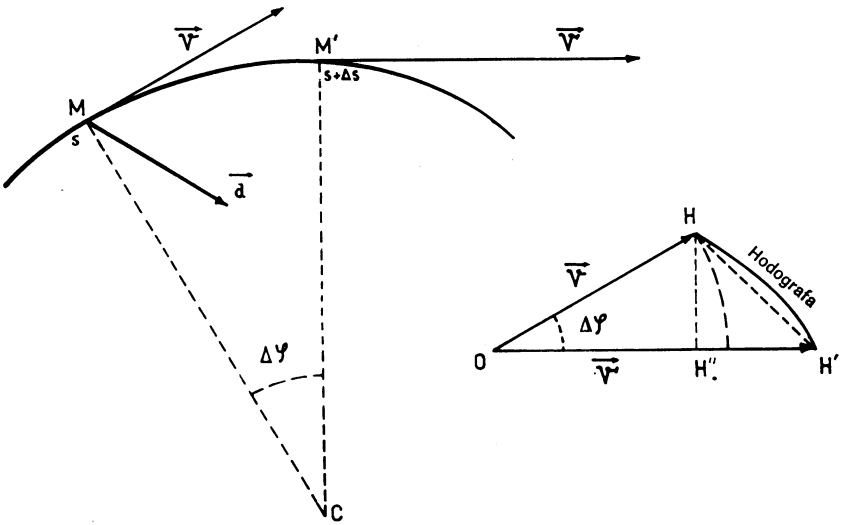


FIG. 4.3 Trayectoria y hodógrafa.

vemos que la derivada de v será tangente a la hodógrafa, y ello nos permite ya determinar la dirección de la aceleración a en un punto cualquiera de la trayectoria. Como ahora los vectores velocidad hacen las veces de vectores de posición, la celeridad del punto figurativo H sobre la hodógrafa será igual al módulo de la aceleración.

El vector $H' - H$ no es sino la variación de velocidad Δv y tiene la dirección de Δv/Δt. Al tender Δt a cero, M' tiende a M, v' a v y Δv/Δt a la aceleración a. Ésta se encontrará en el plano determinado por v y v' en el límite, el cual es el *plano osculador* de la curva en M.*

Con centro en O y radio $OH = v$, tracemos un arco de circunferencia que determinará sobre OH' un punto próximo al H'' pie de

* El plano osculador a una curva en un punto M es el determinado por las tangentes a la curva en M y M' cuando M' es muy próximo a M.

la perpendicular trazada desde H. Tendremos la siguiente ecuación vectorial:

$$H' - H = (H'' - H) + (H' - H'') \tag{4.8}$$

Dividiendo ambos miembros por Δt y haciendo tender éste a cero, el primer miembro será **a** y será suma de dos vectores:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{H'' - H}{\Delta t} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H' - H''}{\Delta t} \tag{4.9}$$

que vamos a examinar. El primero tiene la dirección a la cual tiende $H'' - H$, el cual es siempre perpendicular a **v'**, y como éste tiende a **v**, el primero de los dos vectores definidos por las ecuaciones 4.9 será perpendicular a **v**. Veamos su módulo: en la hodógrafa (fig. 4.3) vemos que

$$HH'' = OH \operatorname{sen} \Delta\varphi \tag{4.10}$$

pero, en el límite, el seno y el ángulo son equivalentes, por lo que al dividir la ecuación 4.10 por Δt y pasar al límite podremos escribir

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{HH''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{4.11}$$

ya que $OH = v$. Pero $\Delta\varphi$ es el ángulo que forman las velocidades **v** y **v'**; por tanto, también es el que forman las normales principales a la trayectoria en los puntos M y M'. Estas normales se cortan en un punto C del plano osculador, al que se llama *centro de curvatura*, y la distancia $\rho = CM$ es el llamado *radio de curvatura* en M. Como la longitud del arco MM' es Δs, tendremos

$$\Delta s = \rho \Delta\varphi \qquad \text{o sea} \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{\rho} \Delta s$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación 4.11 queda

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{HH''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{\rho} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} \tag{4.12}$$

Luego el primero de los vectores definidos por las ecuaciones 4.9 está dirigido según la normal principal en M y su módulo vale v^2/ρ

Vayamos al segundo de los vectores definidos por las ecuaciones 4.9. En el límite, la longitud $H''H'$ es igual, salvo infinitésimos de orden superior, a la diferencia $v' - v$ entre las longitudes OH' y OH.

Es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{H'H''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v' - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{4.13}$$

luego el módulo del segundo de los vectores de las ecuaciones 4.9 es igual a la derivada de la *celeridad* respecto al tiempo. Su dirección es la de $\mathbf{v}'$, que en el límite tiende a $\mathbf{v}$. Por tanto, el segundo de los vectores de las ecuaciones 4.9 es tangente a la trayectoria y su módulo es dv/dt.

Como la suma de estos dos vectores es igual a la aceleración $\mathbf{a}$, resulta que al proyectar ésta sobre la tangente y sobre la normal principal a la trayectoria tendremos las llamadas *componentes intrínsecas* de la aceleración (fig. 4.4), que son

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} \quad \text{(aceleración tangencial)} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \quad \text{(aceleración normal)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

según hemos deducido.

Los movimientos en que se mantiene constante la celeridad reciben el nombre de *uniformes* y su aceleración tangencial será nula por serlo la derivada de una constante.

Los movimientos *rectilíneos* tendrán nula su aceleración normal por ser infinito el radio de curvatura en todos los puntos de la trayectoria.

En cualquier caso, el teorema de Pitágoras nos permite ver que el módulo de la aceleración vale

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

4.4 Movimientos rectilíneos. Cuando la trayectoria es una recta, puede tomarse como eje Ox y el problema se simplifica mucho por operar en un espacio de una sola dimensión. A cada valor t del tiempo corresponderá una abscisa x del móvil, que será la única coordenada a considerar, la cual podrá ser positiva o negativa según se halle a uno u otro lado del origen tomado sobre la trayectoria. El signo de x determina el sentido del vector de posición y el vector velocidad tendrá el sentido del semieje positivo de las x cuando x crezca con el tiempo ($\dot{x} > 0$) y el opuesto en caso contrario ($\dot{x} < 0$).

La aceleración será puramente tangencial y estará dirigida según el semieje positivo si $\ddot{x} > 0$, y en sentido opuesto si $\ddot{x} < 0$. Todo ello hace que podamos reducir la operación con vectores a la operación con escalares positivos o negativos.

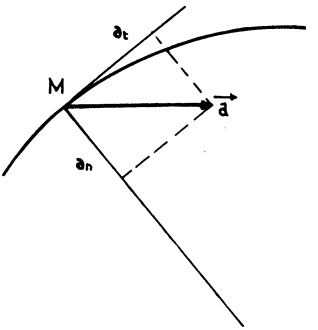


FIG. 4.4 Componentes intrínsecas de la aceleración.

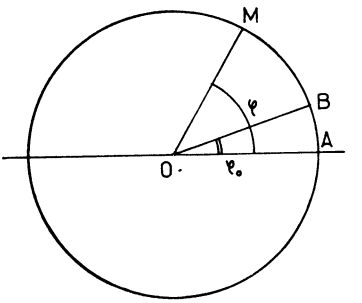


FIG. 4.5 Movimiento circular.

Si la aceleración es constante e igual a a, tendremos

$$\ddot{x} = a \qquad \text{e integrando} \qquad \dot{x} = a\,t + b \tag{4.15}$$

donde b es una constante. Haciendo $t = 0$, el primer miembro será la *celeridad inicial* v_0 y quedará igual a b. Luego la ecuación 4.15 queda en la forma

$$\dot{x} = v = v_0 + a\,t \tag{4.16}$$

Volviendo a integrar:

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 + C$$

Para determinar el valor de la constante C basta hacer $t = 0$ y x tomará un valor x_0 que será la abscisa del punto en el instante en que empieza a contarse el tiempo. Se le llama *espacio inicial*. Tenemos, pues,

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{4.17}$$

Esta expresión, junto con la ecuación 4.16, nos da las leyes del movimiento *rectilíneo uniformemente acelerado*.

En el caso particular en que $a = 0$, la ecuación 4.16 nos dice que la celeridad v se mantiene constante y el movimiento será *rectilíneo y uniforme* y la ley que lo rige la obtendremos de la ecuación 4.17 haciendo $a = 0$, con lo que

$$x = x_0 + v\,t \tag{4.18}$$

4.5 Movimiento circular. Si un punto describe una trayectoria circular con celeridad constante, será un *movimiento circular uniforme.* Por ser uniforme, será nula su aceleración tangencial, y por ser constante el radio de curvatura $\rho = R$ y constante la celeridad, será constante su aceleración puramente normal v^2/R. Esta aceleración se debe a que la velocidad varía de dirección aunque no varíe de módulo.

Consideremos ahora un movimiento circular cualquiera y sea R el radio de la trayectoria. Tomemos como origen de abscisas curvilíneas en el movimiento circular (fig. 4.5) el punto A al que se da el nombre de *origen de arcos.* El arco AM tiene una longitud s, y si es φ el ángulo $\angle AOM$ tendremos

$$s = R\,\varphi$$

Derivando respecto al tiempo tendremos

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

donde el primer miembro es la celeridad del móvil y $d\varphi/dt = \omega$ representa la *celeridad angular* o ángulo girado en unidad de tiempo. Por tanto,

$$v = \frac{ds}{dt} = R\,\omega \tag{4.19}$$

y derivando otra vez

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha \tag{4.20}$$

donde $\alpha = d\omega/dt$ es la aceleración angular. Así pues, *en un movimiento circular, la aceleración tangencial es igual al producto del radio por la aceleración angular.*

En el caso del movimiento circular uniforme, la ecuación 4.19 nos dice que ω es constante, luego

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0 \tag{4.21}$$

donde φ_0 es el ángulo girado en el instante $t = 0$, es decir, $\angle AOB$ en la figura 4.5.

4.6 Unidades de velocidad y de aceleración. Cuando se quiera describir un movimiento, será necesario poder medir la velocidad y la aceleración en cada instante y para ello debemos definir las unidades de medida de los módulos de dichas magnitudes.

Las unidades de celeridad más empleadas en Física son el centímetro por segundo (cm/s) y el metro por segundo (m/s), siendo también útil en la vida práctica el kilómetro por hora (km/h). Se define el metro por segundo como la celeridad de un móvil que animado de movimiento uniforme recorra un metro cada segundo. El cm/s será la centésima parte de la anterior unidad, y el km/h es la celeridad de un móvil que animado de movimiento uniforme recorra 1 km en cada hora. En el sistema internacional (SI) se toma el m/s.

Estas definiciones no significan que para poder medir la velocidad de un móvil éste tenga que moverse con movimiento uniforme. Un móvil puede ir variando su celeridad y ésta será, en un instante determinado, igual a la que llevaría otro móvil animado de movimiento uniforme, y en otro instante su celeridad igualaría la de un tercer móvil animado de otro movimiento uniforme. Es decir: podríamos considerar un conjunto de móviles, todos ellos con movimientos uniformes de diferentes celeridades, que nos servirían como patrones de celeridad con los cuales pudiéramos comparar la celeridad variable que en cada instante lleve el móvil problema. El definir las unidades de celeridad a partir de movimientos uniformes sólo se hace por razón de su sencillez.

Análogamente, para definir las unidades de aceleración lo haremos a partir del movimiento acelerado más sencillo, que es el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Así, definiremos el centímetro por segundo por segundo (cm/s^2) como la aceleración de un móvil que, animado de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, aumente su celeridad en 1 cm/s cada segundo. El metro por segundo por segundo (m/s^2) será cien veces mayor y es la unidad del SI.

5

Cinemática de los sistemas rígidos

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de un punto. Cuando en lugar de un punto único tenemos un conjunto de puntos que mantienen invariables sus distancias mutuas, decimos que tenemos un sistema o cuerpo *rígido*. Vamos a intentar estudiar cómo se distribuyen los movimientos entre los distintos puntos de un cuerpo rígido.

5.1 Movimiento de traslación. El movimiento más sencillo que puede tener un cuerpo rígido es el de traslación. Diremos que *un cuerpo rígido está animado de movimiento de traslación cuando todo segmento rectilíneo del cuerpo se mantenga paralelo a sí mismo* durante el movimiento. De esta definición se desprende que todo plano del cuerpo se mantiene paralelo a sí mismo. En efecto: tres puntos cualesquiera A, B y C determinan un plano. Los lados del triángulo ABC se mantienen paralelos a sí mismos pasando a la nueva

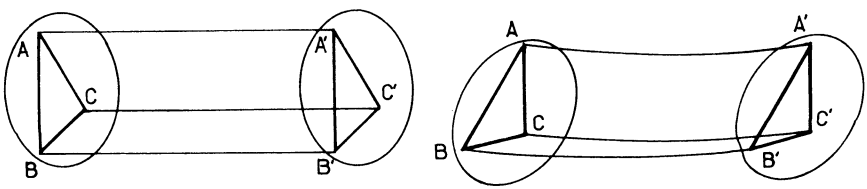


FIG. 5.1 Movimiento de traslación.

posición $A'B'C'$ (fig. 5.1 *a*); los desplazamientos AA', BB' y CC' determinan vectores equipolentes por ser, dos a dos, lados opuestos de sendos paralelogramos, luego, además de demostrar lo que queríamos, vemos que los desplazamientos de *todos* los puntos del cuerpo, en un

mismo instante, son vectores equipolentes. Dividiendo dichos desplazamientos por el tiempo común en que han tenido lugar, resultará que las velocidades son también equipolentes y podremos afirmar que *en el movimiento de traslación todos los puntos tienen, en cada instante, la misma velocidad.* Lo mismo podría decirse de la aceleración, por lo que vemos que el conocimiento del movimiento de un punto de un cuerpo en movimiento de traslación nos define el movimiento de todos los demás puntos.

En la figura 5.1 *b* se ha representado una *traslación curvilínea,* es decir, todo segmento se mantiene paralelo a su posición inicial, pero los puntos recorren trayectorias curvas. Es, desde luego, una traslación y podemos descomponer el movimiento en traslaciones elementales suficientemente cortas para poderse considerar rectilíneas como la representada en la figura 5.1 *a*. Luego la traslación curvilínea cumple también las condiciones instantáneas antes estudiadas.

5.2 Movimiento de rotación. Diremos que un cuerpo rígido está *animado de movimiento de rotación cuando mantiene fijos dos de sus puntos.* Sean éstos O y O', los cuales determinan una recta llamada *eje de rotación,* y sea A un punto de este eje. Por ser rígido el sistema, A se ha de mantener siempre a la misma distancia de O, luego las posiciones que tome A durante el movimiento deberán ser puntos de una superficie esférica de centro O y radio OA (fig. 5.2 *a*). Por otra parte, también deberá mantenerse invariable su distancia a O', y ello le obliga a estar también sobre una superficie esférica de radio $O'A$.

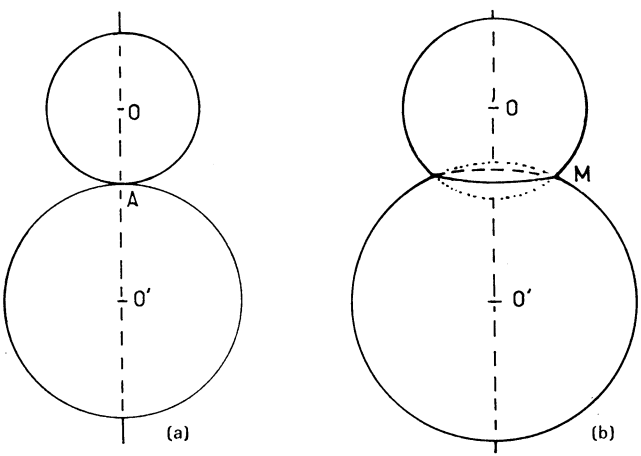


FIG. 5.2 Movimiento de rotación.

Ahora bien, como $OO' = OA + AO'$, dichas esferas son tangentes en A, por lo que éste no podrá moverse. Si el punto A hubiera sido uno del eje, exterior al segmento OO', las superficies esféricas hubieran sido tangentes interiores y tampoco hubiera podido moverse A. Luego: *todos los puntos del eje de rotación están inmóviles.*

Consideremos ahora un punto M exterior al eje. La rigidez del sistema le obliga a mantener invariable su distancia a O, por lo que sus posiciones deberán ser puntos de una superficie esférica de centro en O y radio OM (fig. 5.2 *b*). Por análoga razón, también deberán ser puntos de una superficie esférica de centro O' y radio $O'M$. Ahora bien, estas superficies se cortan según una circunferencia contenida en un plano normal al eje y centrada en éste, luego *las trayectorias de los puntos de un cuerpo en movimiento de rotación son circulares, centradas en el eje de rotación y contenidas en planos normales a dicho eje.*

Consideremos dos semiplanos limitados por el eje de rotación. Uno de ellos fijo en el espacio y el otro solidario al cuerpo. El ángulo diedro φ que forman variará durante el movimiento y la rigidez del sistema hará que su variación en un tiempo dado sea igual al ángulo girado en dicho tiempo por uno cualquiera de los puntos del cuerpo en su movimiento circular. Luego, *en cada instante,* todos los puntos tendrán la misma celeridad angular $\omega = \dot{\varphi}$ (cfr. § 4.5).

Tomemos ahora sobre el eje un vector deslizante ω de módulo igual a la celeridad angular y dirigido en el sentido que avanzaría un sacacorchos que girase con el cuerpo. A dicho vector le llamaremos *velocidad angular.* Su momento respecto a un punto P cualquiera del cuerpo será (fig. 5.3) un vector tangente en P a la trayectoria de éste y dirigido en el sentido de su avance; es decir, la dirección y sentido del momento de ω respecto a P coinciden con la dirección y sentido de la velocidad de P. En cuanto a su módulo, sería $\omega \cdot OP$, y como OP es el radio de la trayectoria de P, el módulo del momento coincide con la celeridad de P (cfr. ec. 4.19). Podremos, pues, escribir

$$\mathbf{v} = (O - P) \wedge \omega \tag{5.1}$$

por coincidir módulo, dirección y sentido de los vectores de los dos miembros y decir que *en el movimiento de rotación en torno a un eje fijo la velocidad de un punto cualquiera es igual al momento respecto a dicho punto del vector velocidad angular.* Conocido ω, queda determinada, pues, la distribución de las velocidades entre los distintos puntos del cuerpo en rotación.

5.3 Movimiento helicoidal. Consideremos un cuerpo en rotación alrededor de un eje, determinada por un vector ω, y que esté animado simultáneamente de una traslación paralela a dicho eje caracterizada por una velocidad $\mathbf{v}_0$.

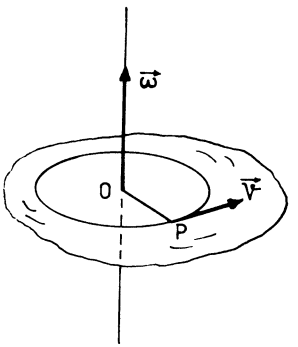


FIG. 5.3 Velocidad lineal y velocidad angular en el movimiento de rotación.

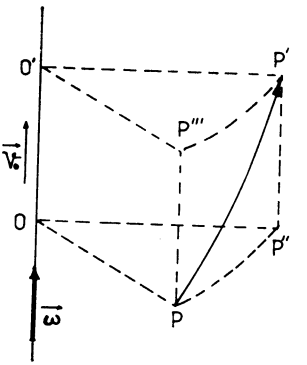


FIG. 5.4 Movimiento de rotación y deslizamiento.

En un instante t, el punto O del eje y el punto P exterior a él (fig. 5.4) determinan un segmento que a consecuencia de la rotación ocuparía al cabo de un tiempo dt la posición OP'' y a consecuencia de la traslación la $O'P'''$. La existencia simultánea de los dos movimientos hace que la posición ocupada en el instante $t + dt$ sea la $O'P'$. Los desplazamientos elementales mencionados son infinitesimales, por lo que pueden considerarse representados por vectores tales que

$$P' - P'' = \mathbf{v}_0\, dt$$

$$P'' - P = (O - P) \wedge \omega\, dt$$

y

$$P' - P = \mathbf{v}_0\, dt + (O - P) \wedge \omega\, dt$$

$P' - P$ es el desplazamiento que sufre P en un tiempo dt, luego dividiendo por dt tendremos la velocidad $\mathbf{v}$ de P en el instante t considerado. Luego

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (O - P) \wedge \omega \tag{5.2}$$

El segundo término del segundo miembro es perpendicular a ω por ser un producto vectorial, y como ω es paralelo a $\mathbf{v}_0$, resulta que $\mathbf{v}$ es la suma de dos vectores perpendiculares: el $\mathbf{v}_0$ paralelo al eje y que es común a todos los puntos, y el $(O - P) \wedge \omega$ debido a la

rotación, que es perpendicular al eje y depende de la posición del punto P.

Conocidos $\mathbf{v}_0$ y ω tendríamos determinada la distribución de velocidades entre los puntos del cuerpo. Si $\mathbf{v}_0$ y ω no variaran con el tiempo (traslación y rotación uniformes), el movimiento recibe el nombre de *helicoidal*. La trayectoria de P es entonces una curva alabeada llamada hélice, que es la definida por el filete de un tornillo. La longitud de la proyección sobre el eje del camino recorrido por P cuando el cuerpo da una rotación completa se llama *paso de rosca* y su valor es

$$h = v_0 T = 2\pi \frac{v_0}{\omega}$$

5.4 Distribución de las velocidades en un movimiento cualquiera. Los movimientos estudiados hasta ahora son muy sencillos y fácilmente hemos llegado a obtener la ley de distribución de las velocidades entre sus puntos. Esto mismo queremos lograr ahora para el caso en que el cuerpo rígido esté animado de un movimiento cualquiera, por complicado que sea. Según veremos, *en cada instante, la distribución de velocidades es la misma que la de un movimiento helicoidal* (llamado movimiento helicoidal tangente en el instante t) cuyas características varían de un instante a otro.

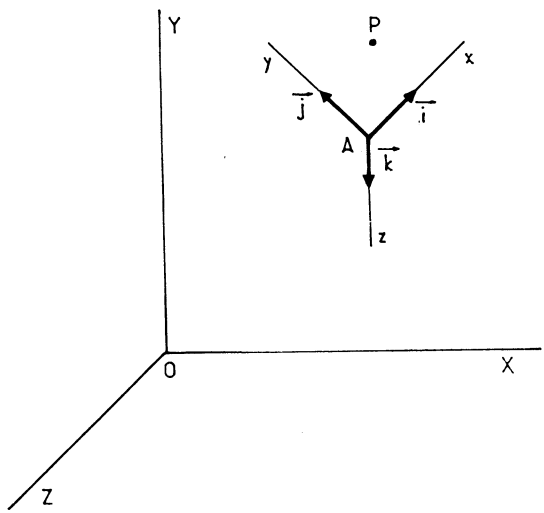


FIG. 5.5

En efecto: consideremos dos ternas de ejes coordenados cartesianos rectangulares $OXYZ$ y $Axyz$ (fig. 5.5), la primera fija y la otra solidaria al cuerpo rígido en movimiento. Sea P un punto del cuerpo de coordenadas x, y, z, constantes (aunque sean variables sus coordenadas X, Y, Z) y sean $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ los versores de los ejes móviles. El vector de posición de P respecto a éstos será

$$P - A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{5.3}$$

Ahora bien,

$$P - A = (P - O) + (O - A) = (P - O) - (A - O)$$

y como la derivada respecto al tiempo del vector de posición es la velocidad del punto determinado, la derivada de $P - A$ será igual a la diferencia de las velocidades de P y A. Derivando, pues, la ecuación 5.3 tendremos

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{5.4}$$

Ahora bien: cualquiera que sea $\mathbf{B}$, tendremos $B_x = \mathbf{B}\cdot\mathbf{i}$, pues el producto escalar es igual al producto del módulo de uno de los vectores (1 el de $\mathbf{i}$) por la proyección (B_x) del otro sobre él. Luego las componentes cartesianas del vector $\dfrac{d\mathbf{i}}{dt}$ serán

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}$$

Podremos, pues, escribir

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{k} \tag{5.5}$$

Pero como $\mathbf{i}$ tiene módulo constante,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i} = 0 \tag{5.6}$$

según vimos al final de § 1.10. Además, por ser los versores mutuamente ortogonales

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

y derivando respecto al tiempo este producto

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{k}\cdot\frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k} = -\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i} \tag{5.7}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.6 y 5.7 en la 5.5 queda

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{k} \tag{5.8}$$

Según la ecuación 1.15,

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}$$

y sustituidas en la ecuación 5.8

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{k} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{j}\right] \wedge \mathbf{i} \tag{5.9}$$

y como

$$\left[\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{i}\right] \wedge \mathbf{i} = 0$$

por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos, sumándolo a la ecuación 5.9 se tiene

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{k}\right] \wedge \mathbf{i}$$

y llamando

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{k} \tag{5.10}$$

la anterior queda en la forma

y análogamente tendríamos

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

que son las llamadas *fórmulas de Poisson* y en las cuales no buscamos, por el momento, el significado de ω, limitándonos a decir que es el vector definido por la ecuación 5.10. Sustituyendo las ecuaciones 5.11 en la 5.4 y despejando $\mathbf{v}_P$ tenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \omega \wedge (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = \mathbf{v}_A + \omega \wedge (P - A)$$

o sea

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + (A - P) \wedge \omega \tag{5.12}$$

Comparando esta ecuación con la 2.6 podemos decir que *la velocidad de un punto P de un cuerpo rígido es igual al momento resultante respecto a P de un sistema de vectores deslizantes que tenga por resultante general ω y por momento resultante respecto a otro punto A la velocidad de éste.*

El problema de la distribución puede resolverse sin más que considerar el vector ω aplicado a un punto de velocidad conocida y un par cuyo momento sea igual a esta velocidad. El momento resultante de este sistema tan simple respecto a un punto cualquiera nos dará la velocidad de éste.

El trinomio invariante es ahora $\mathbf{v}\cdot\omega$, y siguiendo el cuadro dado al final del § 2.8 tenemos que si es nulo puede ocurrir:

$\omega = 0$	$v = 0$	estado de reposo en el instante considerado.
$\omega = 0$	$v \neq 0$	par, en todos los puntos la misma velocidad (movimiento de traslación).
$\omega \neq 0$	$v = 0$	vector deslizante único equipolente a ω (movimiento de rotación).
ω perpend. a $\mathbf{v}$		lo mismo que el anterior (movimiento de rotación).

Si ω no es nulo, el sistema de vectores admite eje central en cuyos puntos $\mathbf{v}$ y ω tienen igual dirección y v es mínima. Por tanto, s' O es punto de dicho eje, la ecuación 5.12 queda, al sustituir A por O,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + (O - P) \wedge \omega$$

que por ser $\mathbf{v}_0$ y ω de igual dirección concuerda con la ecuación 5.2 y la distribución de velocidades entre todos los puntos coincide con la de un movimiento helicoidal caracterizado por los vectores $\mathbf{v}_0$ y ω. Este último, por ser deslizante y ser su soporte el eje central mencionado, determina la posición de éste, que será llamado *eje instantáneo*

de rotación y deslizamiento. Como en él es mínima v, si el trinomio invariante es nulo deberá ser en él $v = 0$ y sólo habrá rotación.

Insistimos en que todo lo estudiado ocurre en un instante y que en otros los vectores $\mathbf{v}_0$ y $\boldsymbol{\omega}$ pueden haber variado, por lo que el eje instantáneo, en general, cambiará continuamente de posición en el espacio y en el propio cuerpo. Sólo dejará de estar definido en los instantes en que el movimiento sea una traslación. El eje instantáneo, en su movimiento respecto al sistema de referencia fijo en el espacio, describirá una superficie reglada que recibe el nombre de *axoide fijo.* Y en su movimiento en el cuerpo rígido móvil describe otra superficie reglada llamada *axoide móvil.* Se comprende que, en cada instante, ambos axoides tienen una recta común, que es el eje instantáneo correspondiente a dicho instante. Puede demostrarse que ambos axoides son tangentes según la mencionada recta. No lo vamos a demostrar, sino que vamos a ilustrarlo con un ejemplo:

Un sólido gira alrededor de un eje solidario a él con velocidad angular ω_1 y este eje gira a su vez en torno a un eje paralelo con velocidad angular ω_2 del mismo sentido (fig. 5.6 *a*). La velocidad angular del sólido respecto a este segundo eje, que consideramos fijo en el espacio, será un vector deslizante $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ soportado por el eje instantáneo. Esto se comprende fácilmente, pues si en un tiempo dt el sólido gira un ángulo $d\theta_1$ respecto al primer eje (fig. 5.6 *b*) y en este mismo tiempo este eje gira un ángulo $d\theta_2$ respecto al eje fijo en el espacio (ángulo $C'OC$ de fig. 5.6 *b*), el cuerpo habrá girado respecto a este eje el ángulo $MEM' = d\theta = d\theta_1 + d\theta_2$, que dividido

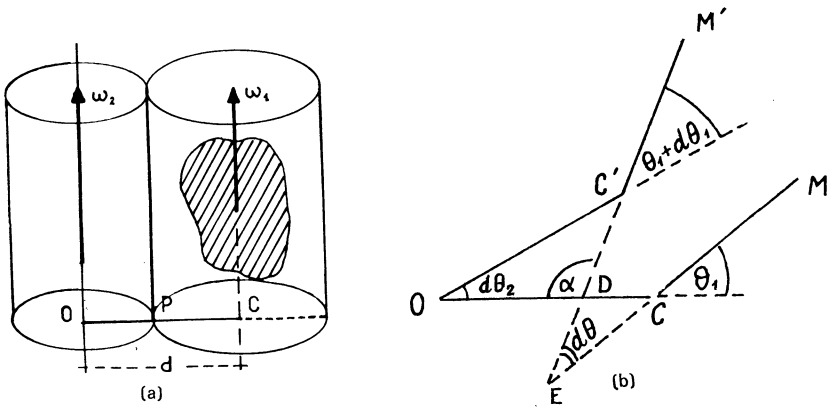


FIG. 5.6 *a*) El sólido gira con velocidad angular ω_1 alrededor de un eje propio y éste gira en torno a un eje fijo en el espacio con velocidad angular ω_2. *b*) Sección normal a los ejes. M y M' son dos posiciones de un mismo punto del sólido. C y C', de un mismo punto del eje solidario a él. En $\Delta DOC'$ $\theta_1 + d\theta_1 + d\theta_2 = \pi - \alpha$; en ΔCDE: $\pi - \alpha = d\theta + \theta_1$. Luego $d\theta_1 + d\theta_2 = d\theta$.

por dt nos dará la celeridad angular alrededor del eje fijo $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ y ya sabemos que la resultante general de un sistema de dos vectores deslizantes paralelos y de igual sentido tiene por módulo la suma de los módulos y es paralela a ellos y de igual sentido. El eje instantáneo será, pues, paralelo a ambos ejes, y como será el soporte del vector Ω, para localizarlo bastará localizar éste, el cual pasará por un punto P (fig. 5.6 *a*) tal que el momento respecto a O de Ω sea igual al momento de ω_1, es decir:

$$OP = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} d$$

El axoide fijo será, por tanto, un cilindro de radio OP. El eje que pasa por C es solidario al cuerpo, y como el momento respecto a C de Ω ha de ser igual al momento de ω_2, deberá cumplirse

$$PC = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} d$$

Esto indica que el eje instantáneo se halla siempre a esta misma distancia del soporte de ω_1 y por tanto describe una superficie cilíndrica cuyo eje es este soporte y cuyo radio es CP. Es el axoide móvil. Vemos, pues, cómo los dos axoides son dos superficies regladas (cilíndricas en este caso) tangentes en cada instante según el eje instantáneo.

5.5 Relatividad del movimiento. La descripción de un movimiento se hace siempre respecto a un sistema de referencia. Los movimientos que tienen lugar en una sala se refieren al sistema definido por las paredes y el suelo, pero pudiera convenir referirlos a otro sistema en movimiento respecto a la sala, que es lo mismo que decir respecto al cual esté la sala en movimiento. El movimiento siempre es relativo a un sistema u otro, y así, al viajar en tren, vemos los postes del telégrafo en movimiento respecto al convoy y en reposo respecto a la Tierra. Ésta está en movimiento respecto al Sol y el Sol sabemos que se mueve hacia la constelación de Hércules, etc. Total, no puede hablarse de movimiento o reposo absolutos, sino respecto a un sistema. No existe ningún sistema de referencia privilegiado en el que pudieran observarse movimientos absolutos. No tiene sentido hablar de ello.

Ahora bien, conociendo el movimiento de un cuerpo relativo a un sistema S y conociendo el movimiento de este sistema respecto a

otro S', podremos referir a éste el movimiento del cuerpo que conocemos relativo a S. El ejemplo del § 5.4 constituye un caso particular. Veamos cómo podemos hacerlo en general:

Consideremos en el sistema S una terna de ejes $Oxyz$ (fig. 5.8) y sean $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ las ecuaciones del movimiento de un punto P; a este movimiento le llamaremos *relativo*. En el sistema S' al cual queremos referir el movimiento de P tomaremos otra terna de ejes $O'x'y'z'$ de referencia. La terna $Oxyz$ estará en movimiento respecto a la $O'x'y'z'$ y al movimiento de P respecto a S' le llamaremos, aun a sabiendas de lo poco feliz de la denominación, movimiento *absoluto*.

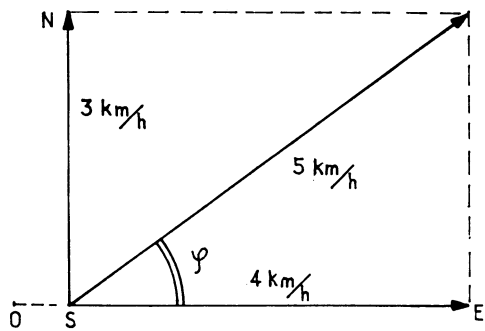


FIG. 5.7

Los movimientos los estudiaremos en un mismo instante t cualquiera. En dicho instante, el punto P móvil respecto a S pasa por un punto P' fijo respecto a S al que se da el nombre de *punto de coincidencia*. Al movimiento del punto de coincidencia se le llama *movimiento de arrastre*. Ilustremos con un ejemplo estos tres movimientos: imaginemos que recorremos un meridiano terrestre de Sur a Norte a 3 km/h. Esta velocidad sería medida respecto al suelo y nuestro movimiento sería el movimiento relativo. En un instante, pasaremos por un punto P' de la superficie terrestre que, a causa de la rotación de la Tierra, se mueve hacia el Este a 4 km/h según vería un observador situado en el Sol. P' es el punto de coincidencia y su movimiento es el de arrastre. Este observador en el Sol nos vería mover en una dirección no perpendicular al paralelo geográfico que pasa por P', sino que forma con ella (fig. 5.7) un ángulo $\varphi = \text{arc tg } (3/4)$ y la velocidad que nos observaría sería de 5 km/h. Éste sería el mal llamado movimiento absoluto.

5.6 Composición de velocidades. Consideremos las ternas de ejes $Oxyz$ y $O'x'y'z'$ (fig. 5.8) de los sistemas S y S' a que hemos hecho referencia y sean $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ los versores de los ejes de la terna $Oxyz$. El vector de posición del punto P respecto a S será

$$P - O = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{5.13}$$

y respecto a S' sería

$$P - O' = (O - O') + (P - O) = (O - O') + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{5.14}$$

La velocidad en el movimiento absoluto, o *velocidad absoluta,* será la derivada respecto al tiempo de $P - O'$, por tanto la obtendremos de-

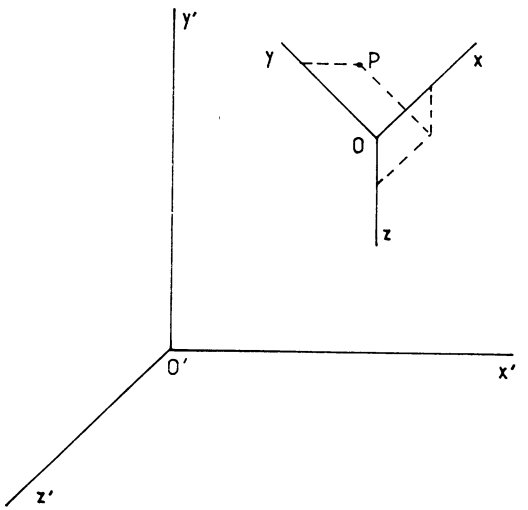


FIG. 5.8

rivando la ecuación 5.14. Hay que tener en cuenta que las coordenadas x, y, z de P respecto a S varían con el tiempo, pero también lo hacen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, por variar su orientación. Luego al derivar la ecuación 5.14 tendremos

$$\mathbf{v} = \frac{d(O - O')}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} \tag{5.15}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad absoluta.

El movimiento de arrastre es el del punto P' de coincidencia que tiene sus coordenadas respecto a S *constantes* y coincidentes con las del punto P en el instante t considerado. Así pues, la expresión de $P' - O'$ será la ecuación 5.14 siendo x, y, z constantes. Al derivar,

$$\mathbf{v}_a = \frac{d(O - O')}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{5.16}$$

donde $\mathbf{v}_a$ es la velocidad de arrastre.

En el movimiento relativo, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ no varían, pues respecto a S no se mueven. La velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ se obtendrá derivando respecto al tiempo la ecuación 5.13 y resulta

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} \tag{5.17}$$

y comparando las ecuaciones 5.15, 5.16 y 5.17 tenemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a \tag{5.18}$$

5.7 Composición de aceleraciones; teorema de Coriolis. Para hallar la *aceleración absoluta* bastará derivar respecto al tiempo la ecuación 5.15, en la cual son variables todas las magnitudes que intervienen. Se obtiene así

$$\mathbf{a} = \frac{d^2(O - O')}{dt^2} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} + \\ + \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} + 2\left(\dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) \tag{5.19}$$

Para hallar la *aceleración de arrastre* derivaremos respecto al tiempo la ecuación 5.16, recordando que en el movimiento de arrastre son constantes x, y, z. Resulta así

$$\mathbf{a}_a = \frac{d^2(O - O')}{dt^2} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \tag{5.20}$$

y la *aceleración relativa* se obtendrá derivando respecto al tiempo la ecuación 5.17 teniendo en cuenta que en el movimiento relativo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ no varían. Así pues,

$$\mathbf{a}_r = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} \tag{5.21}$$

Vemos ahora que la aceleración absoluta (ec. 5.19) no es sólo la suma de las aceleraciones de arrastre y relativa, sino que a dicha suma hay que agregar un término

$$\mathbf{a}_c = 2\left(\dot{x}\frac{\mathbf{di}}{dt} + \dot{y}\frac{\mathbf{dj}}{dt} + \dot{z}\frac{\mathbf{dk}}{dt} \right) \tag{5.22}$$

al que se da el nombre de *aceleración complementaria* o de Coriolis.

Podemos poner esta aceleración de una manera más explícita sustituyendo en la ecuación 5.22 las ecuaciones 5.11

$$\mathbf{a}_c = 2\,(\dot{x}\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k})$$

y aplicando la propiedad representada por la ecuación 1.13 y sacando $\boldsymbol{\omega}$ factor común queda

$$\mathbf{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k})$$

que en virtud de la ecuación 5.17 es

$$\mathbf{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \tag{5.23}$$

Cuando el movimiento del sistema S respecto del S' sea de traslación, $\boldsymbol{\omega} = 0$ y será nula la aceleración complementaria. En el caso más general, el teorema de Coriolis nos dice que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \tag{5.24}$$

5.8 Movimiento plano. Se llama así al movimiento de una figura plana que se mueve en su plano. En los mecanismos empleados corrientemente, las piezas tienen volumen, pero, no obstante, podemos imaginarlas, por lo general, descompuestas en secciones planas que se mueven de igual manera en planos paralelos y el estudio del movimiento del mecanismo puede reducirse al de un movimiento plano.

En la figura 5.9 se han representado dos puntos A y B, de la figura móvil, con sus velocidades correspondientes. Éstas están representadas por vectores contenidos en su plano, que es el del papel, y en virtud de la ecuación 5.12 están relacionadas por

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + (A - B) \wedge \boldsymbol{\omega}$$

El producto vectorial del segundo miembro deberá estar contenido en el plano por estarlo $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, y como $A - B$ también lo está, $\boldsymbol{\omega}$ deberá ser necesariamente normal al plano, pues ha de serlo al pro-

ducto vectorial y éste a $A - B$ cualesquiera que sean A y B en el plano. Así pues, ω será perpendicular a la velocidad en todos los puntos y tenemos $\omega \cdot \mathbf{v} = 0$. Caben, pues, dos posibilidades: $\omega = 0$ y $\omega \neq 0$. En el primer caso, ya sabemos que se trata de un movimiento de traslación en el plano. En el segundo, el sistema de vectores mencionado en el § 5.4 a continuación de la ecuación 5.12 se reduce a un vector único ω que pasará por un punto I del plano cuya

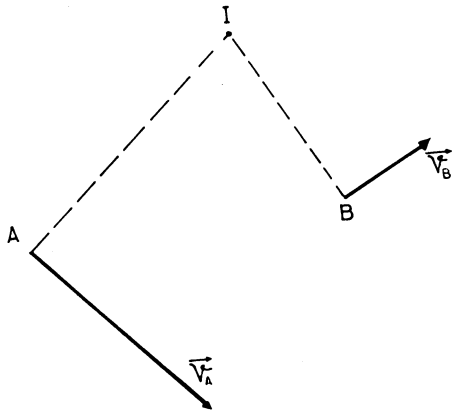


FIG. 5.9 Movimiento plano.

velocidad será nula por ser igual al momento de ω respecto a I. Este punto está en reposo y pertenece al eje instantáneo, luego el movimiento instantáneo será una *rotación* en torno a I, punto llamado *centro instantáneo de rotación* en el instante considerado. Los puntos A y B, pues, están animados en ese instante de movimientos circulares de celeridad angular ω y radios IA e IB, respectivamente. Como en el movimiento circular la velocidad es perpendicular al radio, para determinar la posición de I bastará conocer las direcciones de la velocidad en dos puntos (A y B, por ejemplo) y trazando las perpendiculares respectivas por A y B tendrán las direcciones de los radios correspondientes y se cortarán en el centro instantáneo de rotación. Éste cambiará de posición constantemente, tanto en el plano fijo π de referencia como en un plano móvil p solidario a la figura móvil y coincidente con π. Al lugar geométrico de sus posiciones en el plano fijo π se le da el nombre de *base* o *polar fija*, mientras que el lugar geométrico de sus posiciones en el plano p será una curva solidaria a la figura, llamada *ruleta* o *polar móvil*. Ambas polares tendrán en cada instante un punto común que es el centro instantáneo

correspondiente a dicho instante. Vamos a demostrar que se trata de un punto de tangencia:

Consideremos ahora el plano π como sistema S' (§§ 5.5 y 5.6) y el plano p como sistema S. El centro instantáneo de rotación I tendrá un movimiento relativo a S que le hará recorrer la ruleta. El punto de la ruleta que ocupe I en el instante t será el punto de coincidencia y su movimiento respecto a S' será el de arrastre. Pero dicho punto de coincidencia es el punto común de ruleta y base que está en reposo respecto a S' por ser el centro instantáneo de rotación y girar alrededor de él, en ese instante, todo el sistema S. Luego $v_a = 0$ y la ecuación 5.18 quedará en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r \tag{5.25}$$

Ahora bien, $\mathbf{v}$ es la velocidad del punto móvil I respecto a S' y en este sistema el centro instantáneo de rotación recorre la base. Como la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, la ecuación 5.25 nos dice que las tangentes a la base y a la ruleta en el punto común coinciden. Luego: *ruleta y base son tangentes, en cada instante, en el centro instantáneo de rotación correspondiente.*

En el instante $t + dt$, I habrá recorrido sobre la ruleta un desplazamiento $\mathbf{v}_r\, dt$ y sobre la base otro $\mathbf{v}\, dt$ que, en virtud de la ecuación 5.25, son iguales, por lo cual *la ruleta solidaria a la figura rueda sin deslizar sobre la base fija al plano,* pues es evidente que si hubiera deslizamiento no serían iguales los desplazamientos.

Ejemplo muy sencillo de ruleta y base lo tenemos en el movimiento de la rueda de un vehículo que ruede sin deslizar sobre la calzada. El centro instantáneo de rotación es el punto de contacto de la rueda con el suelo. Para darse cuenta de ello basta pensar en la huella que deja en la tierra la pastilla del neumático. Si la velocidad del contacto no fuese nula, el mismo neumático borraría tal huella. Por tanto, si el punto de contacto es el centro instantáneo de rotación y consideramos el caso de una rueda y un raíl, como cada uno de los puntos de éste entra en contacto con la rueda en distintos instantes, el raíl constituirá la base fija en el plano vertical que contiene la rueda, y como cada uno de los puntos de la periferia de ésta es centro instantáneo en diferentes instantes, dicha periferia será la ruleta solidaria a la rueda.

6

Estática

La Cinemática nos ha enseñado a describir los movimientos, o sea dice *cómo* se mueven los cuerpos, pero no *por qué* se mueven. La relación existente entre el movimiento de un cuerpo y sus causas es el objeto de estudio de la Dinámica, la cual nos enseña que el movimiento depende de las características materiales del cuerpo considerado y de las acciones que sobre él ejerzan otros cuerpos. Estas acciones llevan el nombre de fuerzas y los efectos que producen dependerán del cuerpo o sistema de cuerpos al que se apliquen y en particular dichos efectos pueden contrarrestarse entre sí dando lugar a una situación análoga a la que se tendría si no se ejerciera ninguna acción, situación que se conoce con el nombre de estado de equilibrio. La Estática es la parte de la Física que estudia los estados de equilibrio, por lo cual en ella no se consideran nunca los movimientos.

6.1 Concepto estático de fuerza. La primera noción de fuerza la tenemos a través del esfuerzo muscular. Para sostener una maleta ejercemos un esfuerzo muscular que evita que la maleta caiga. Mediante un esfuerzo muscular lanzamos una pelota. Mediante un esfuerzo muscular podemos estirar o comprimir un resorte. Toda circunstancia que pueda sustituir a la acción de un esfuerzo muscular o que pueda ser contrarrestada por un esfuerzo muscular recibe el nombre de *fuerza*. Así, por ejemplo, si colocamos la maleta sobre una mesa, tampoco cae; es decir, la mesa ejerce una fuerza sobre la maleta, porque su acción sustituye al esfuerzo muscular que evitaba la caída. El cordaje de una raqueta de tenis ejerce una fuerza sobre la pelota, pues la lanza de igual manera que pudiera hacerlo nuestro esfuerzo muscular. Un cuerpo pesado colgado de un resorte le ejerce una fuerza, pues lo alarga de manera análoga a como lo haríamos

tirando de él con la mano, etc. Ahora bien, la aplicación de un esfuerzo muscular nos da la idea de asociarle un número que mida su intensidad, pero también la de asociarle una dirección y un sentido, pues no es lo mismo lanzar la pelota en una dirección que en otra. Por tanto, las fuerzas serán magnitudes vectoriales y para medir su módulo podemos, entre otros métodos que más adelante se verán, aprovechar el hecho de que al aplicar una fuerza a un resorte fijo por un extremo, lo alarga. De esta manera, estableceremos una escala de fuerzas asignando el valor unidad a la fuerza que origine un cierto alargamiento a un resorte, el valor dos a la que le origine un alargamiento doble, y en general, el valor n a la fuerza que alargue dicho resorte en una cantidad n veces mayor que el alargamiento debido a la fuerza unidad, no siendo nunca demasiado grandes los alargamientos. Un resorte provisto de un índice que señale las fuerzas sobre una escala calibrada de esta manera recibe el nombre de *dinamómetro.*

Los ejemplos de fuerza que hemos citado corresponden todos a fuerzas *de contacto,* por estar el sistema perturbado en contacto con el sistema perturbador. No obstante, las fuerzas también pueden ejercerse *a distancia,* como sería el caso de un imán que atraiga un pedazo de hierro dulce que no esté en contacto con él, la fuerza que el Sol ejerce sobre los planetas, etc.

6.2 Estática del punto. Consideremos un cuerpo de dimensiones muy pequeñas frente a las demás del sistema de referencia, por lo que podremos considerar dicho cuerpo como un punto P. Las fuerzas aplicadas a él las podremos representar por vectores fijos de origen P (si bien puede ampliarse la representación a vectores deslizantes cuyas rectas soporte concurran en P). *Si el sistema de vectores representativos de las fuerzas da resultante nula, el punto* (o el sistema de fuerzas, si se quiere) *estará en equilibrio*; es decir, si el punto se hallaba inmóvil respecto al sistema de referencia antes de la aplicación de las fuerzas, seguirá estándolo una vez aplicadas todas ellas simultáneamente. La anterior afirmación es un postulado que admitimos porque las consecuencias que de él se derivan están todas confirmadas por la experiencia. Así, por ejemplo, si unimos al punto P tres dinamómetros (fig. 6.1 *a*) y tiramos de ellos de manera que el punto esté en equilibrio, las indicaciones de los dinamómetros tomadas como módulos de vectores dirigidos según las fuerzas aplicadas determinan un sistema de vectores concurrentes de resultante nula (fig. 6.1 *b*). Como consecuencia directa tendremos que el equilibrio no se alterará si se agregan o suprimen dos fuerzas opuestas, si se sus-

tituyen dos o más fuerzas por su suma vectorial o si una fuerza se sustituye por otras varias que la tengan como resultante (cfr. § 2.8).

Si a P se aplican las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (fig. 6.1) solamente, no habrá equilibrio, pues *para que se equilibren dos fuerzas aplicadas a un punto deben ser opuestas.* Ahora bien, la fuerza $\mathbf{F}_3$ que las equilibra es opuesta de la suma vectorial de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, por tanto, el efecto que produzcan estas dos al actuar simultáneamente ha de ser igual al que produciría su resultante $-\mathbf{F}_3$.

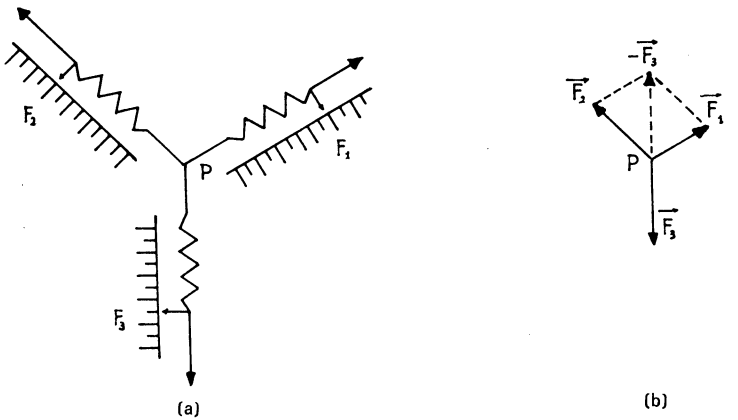


FIG. 6.1 Punto en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas.

Un punto material se dice que está ligado o vinculado cuando existen limitaciones físicas que restringen los desplazamientos posibles del punto. A dichas limitaciones se les da el nombre de ligaduras o vínculos. Por ejemplo, un libro sobre la mesa está vinculado a un plano horizontal (el de la mesa), y un cajón del escritorio también podemos considerarlo vinculado a un plano horizontal. Ahora bien, estas ligaduras presentan una diferencia notable entre sí. La ligadura constituida por la mesa sólo es eficaz en uno de los dos sentidos de la normal a ella, pues no puede evitar que elevemos el libro. En tal caso decimos que se trata de una *ligadura unilateral.* En cambio, el cajón sólo puede desplazarse horizontalmente y la ligadura a que está sometido es eficaz en los dos sentidos de la vertical, por lo que decimos que se trata de una *ligadura bilateral.* De una manera general, la superficie (o la línea) a la que esté vinculado el punto recibe el nombre de *guía*; si la ligadura es eficaz en un solo sentido de la normal a la guía diremos que es unilateral, y si lo es en los dos, diremos que es bilateral.

Se comprende que un punto ligado pueda estar en equilibrio a pesar de que las fuerzas a él aplicadas no formen un sistema nulo. Así, por ejemplo, si empujamos una puerta que tiene echada la llave, el vínculo constituido por la cerradura mantiene el equilibrio a pesar de que estamos aplicando una fuerza que lo rompería si no existiera el vínculo mencionado. Si aumentamos la presión sobre la puerta, ésta sigue inmóvil. ¿Cómo podemos interpretar esto? La interpretación más inmediata es que el vínculo ejerce una fuerza que equilibra a las fuerzas aplicadas. A las fuerzas ejercidas por los vínculos se les llama *fuerzas de ligadura* o *reacciones vinculares*. Admitida esta interpretación, resulta que estas fuerzas de ligadura varían al variar las fuerzas aplicadas (e incluso varían con el movimiento del punto si éste no está en equilibrio) y para estudiar el equilibrio de un punto vinculado bastará considerarlo sometido a las fuerzas aplicadas y a las de ligadura, suprimiendo los vínculos materiales. Se trata entonces el punto como si fuera libre.

6.3 Principio de la igualdad de la acción y la reacción. Al principio de este capítulo hemos dicho que las fuerzas son acciones que unos cuerpos ejercen sobre otros. Estas acciones presentan una particularidad, y es que *cuando un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro, éste ejerce sobre el primero otra fuerza (reacción) de igual módulo y recta soporte, pero de sentido opuesto.* Este postulado se debe a NEWTON y constituye una de las leyes fundamentales de su Mecánica.

Es interesante señalar, en primer lugar, que acción y reacción están aplicadas en cuerpos diferentes y por ello nunca deben componerse. Así, por ejemplo, si apretamos la pared con el dedo, aquélla ejerce sobre éste una fuerza opuesta cuya intensidad aumenta si aumentamos la presión del dedo contra la pared, y si tanto apretamos, nos dolerá a causa de la fuerza que la pared ejerce *sobre el dedo.* Enganchemos un dinamómetro a una pared y tiremos de él. El dinamómetro tira de la pared (acción) y la pared tira del dinamómetro en sentido opuesto (reacción). Para comprobarlo, desenganchémoslo de la pared y tiremos de un extremo con la mano derecha y del otro con la izquierda. Ésta hace lo que antes hacía la pared y notamos que debe ejercer sobre el dinamómetro una fuerza de igual intensidad que la mano derecha y de sentido opuesto.

Todos sabemos, aun cuando todavía no se haya tratado el tema en este libro, que el peso de un cuerpo es una fuerza de atracción que sobre él ejerce la Tierra. La reacción del peso deberá, pues, estar aplicada a la Tierra. Una lámpara que penda del techo tiene aplicado el

peso propio y la fuerza de ligadura que le ejerce el cordón que la sustenta (que *no* es la reacción del peso, la cual estará aplicada a la Tierra). Como la lámpara está en equilibrio, se deduce que la fuerza de ligadura es opuesta al peso. Es decir, será igual *pero no idéntica* a la reacción del peso.

6.4 Estática de los sistemas de puntos. Un sistema material está constituido por un conjunto, discreto o continuo, de puntos. Las fuerzas que se ejercen sobre éstos pueden deberse a agentes que no pertenezcan al sistema, o bien a los otros puntos del sistema. Las primeras reciben el nombre de *fuerzas exteriores,* y las segundas el de *fuerzas interiores.* Como las reacciones vinculares las ejercen las guías, si suponemos éstas exteriores al sistema, las fuerzas exteriores podrán clasificarse en fuerzas *aplicadas* o activas y fuerzas de ligadura. Estas últimas no son activas, pues no pueden producir movimiento por sí mismas.

El sistema diremos que está en equilibrio cuando lo esté cada uno de sus puntos y ello exige que las fuerzas actuantes sobre cada punto, por separado, constituyan un sistema nulo. Pero las fuerzas que se ejercen sobre un punto genérico P_h serán unas exteriores y otras interiores al sistema. Llamando $\mathbf{F}_h$ a la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre P_h e $\mathbf{I}_h$ a la resultante de las fuerzas interiores que se ejercen sobre dicho punto, la condición de equilibrio de éste será

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{I}_h = 0 \tag{6.1}$$

Si el sistema está constituido por N puntos en equilibrio, tendremos N ecuaciones del tipo de la ecuación 6.1, y sumándolas todas tendríamos

$$\Sigma\, \mathbf{F}_h + \Sigma\, \mathbf{I}_h = 0 \tag{6.2}$$

El segundo sumatorio de la ecuación 6.2 es una suma de fuerzas que en virtud del principio de la igualdad de la acción y la reacción son opuestas dos a dos, por ser fuerzas que unos puntos del sistema ejercen sobre otros puntos del mismo sistema y estar extendido el sumatorio a todos los puntos; luego será nulo y la ecuación 6.2 se reduce a

$$\Sigma\, \mathbf{F}_h = 0 \tag{6.3}$$

que nos dice que *para que un sistema de puntos materiales esté en equilibrio es condición necesaria que la suma de las fuerzas exteriores sea nula.* La condición no es suficiente, pues la ecuación 6.3 podría cumplirse sin que se cumplieran las N ecuaciones 6.1.

La ecuación 6.3 tiene la ventaja de que en ella no figuran las fuerzas interiores al sistema, las cuales en muchos casos son difíciles de determinar. Tiene el inconveniente de no ser suficiente, y por tanto la resolución de un problema de Estática de un sistema podrá exigir el que se resuelvan algunas de las ecuaciones 6.1, con toda la dificultad que ello pueda suponer.

6.5 Estática de los sistemas rígidos. Cuando los puntos que constituyen un sistema mantienen invariables sus distancias mutuas, se dice que el sistema es *rígido*. Cuando los puntos de un sistema rígido puedan considerarse, desde un punto de vista macroscópico, distribuidos con continuidad, el sistema recibe el nombre de *sólido*.

Experimentalmente puede observarse que el efecto que produce la aplicación de una fuerza a un cuerpo rígido es el mismo que se tendría al aplicar la fuerza a cualquier otro punto del cuerpo que esté en la recta soporte de aquélla. Esto nos sugiere que las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido pueden representarse mediante vectores deslizantes y *el sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido está representado por un sistema de vectores deslizantes* respecto al cuerpo al que están aplicadas. Es más, admitiremos que *sistemas de vectores equivalentes representan a sistemas de fuerzas equivalentes*, es decir, que modifican de igual manera al estado de equilibrio o de movimiento de los sistemas rígidos a los que se aplican los sistemas de fuerzas.

Estas dos afirmaciones podemos considerarlas como postulados cuya validez se apoya en el hecho de que todas las consecuencias que de ellos se derivan están corroboradas por la experiencia. Constituyen, pues, los postulados de la Estática de los sistemas rígidos. En virtud de ellos, todas las propiedades estudiadas en el capítulo 2 referentes a los vectores deslizantes las poseerán igualmente los sistemas de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido.

El cuerpo rígido puede estar libre o vinculado. En este último caso podemos sustituir las ligaduras por las reacciones vinculares que ejercen sobre el cuerpo y considerar éste como libre. El diagrama que se tiene al dibujar el cuerpo con las fuerzas aplicadas a él y las reacciones vinculares, habiendo suprimido las ligaduras, se llama *diagrama para el sólido libre* y constituye el primer paso para la resolución de los problemas de la Estática del cuerpo rígido.

La condición *necesaria y suficiente* para el equilibrio de un *cuerpo rígido* es que el sistema de fuerzas *exteriores* (aplicadas y reacciones vinculares) sea equivalente a cero. En efecto, en virtud de los postulados de la Estática de los sistemas rígidos, si el sistema es equiva-

lente a cero será equivalente a un sistema de fuerzas todas nulas, en cuyo caso hay equilibrio. Esta condición, pues, podrá expresarse de la manera siguiente:

$$\mathbf{R} = 0 \qquad \mathbf{M} = 0 \tag{6.4}$$

que en el espacio de tres dimensiones da lugar a seis ecuaciones escalares correspondientes a las proyecciones sobre los tres ejes de las ecuaciones 6.4. Llamando X, Y, Z a las componentes de la resultante general $\mathbf{R}$ y L, M, N a las componentes del momento resultante $\mathbf{M}$ respecto al origen de coordenadas, las cuales serán los momentos resultantes respecto a los ejes coordenados, las seis ecuaciones escalares mencionadas serán

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma F_x = 0 & L &= \Sigma M_x = 0 \\ Y &= \Sigma F_y = 0 & M &= \Sigma M_y = 0 \\ Z &= \Sigma F_z = 0 & N &= \Sigma M_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Si todas las fuerzas estuvieran en un mismo plano, podríamos tomar éste como plano Oxy y todos los sumandos de la ecuación $Z = 0$ serían nulos, pues serían nulas las componentes según Oz de todas las fuerzas. También serían nulos todos los momentos de las fuerzas respecto a los ejes Ox y Oy por ser coplanarias con ellos (cfr. § 2.3), luego las ecuaciones $L = 0$ y $M = 0$, al igual que la $Z = 0$ se cumplen idénticamente, por lo que en este caso de fuerzas coplanarias las condiciones de equilibrio se reducen a tres, que son:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad N = 0 \tag{6.6}$$

Ejemplo: Una barra de 3 m de longitud y peso 10 kp, apoya su extremo A en un plano horizontal, y su punto B (fig. 6.2 *a*) tiene amarrado un hilo vertical sujeto al techo. La barra forma un ángulo de 60° con el plano de apoyo en el equilibrio. Hallar la reacción vincular en A y la tensión del hilo.

El peso es una fuerza que, según veremos, puede considerarse aplicada en el centro G de la barra. Su unidad de medida, el kilopond, se definirá más adelante. Por ahora, mediremos todas las fuerzas con la misma unidad. En la figura 6.2 *b* puede verse el diagrama para sólido libre. En la figura 6.2 *a* se indican los ejes de coordenadas y se toma, arbitrariamente, el punto A como origen de coordenadas. Representaremos por A la reacción vincular en el apoyo A y por B la tensión del hilo. Al aplicar las ecuaciones 6.6 vemos que, como las fuerzas B y peso no tienen componente según Ox, tampoco la podrá tener la fuerza A, y por tanto su componente A_x vale, precisamente, A. Así pues, la segunda de las ecuaciones 6.6 será

$$A + B - 10 = 0 \tag{6.6 bis}$$

El momento de la fuerza A respecto al eje Oz será nulo, pues el eje pasa por A y por ello la suma de los momentos de todas las fuerzas se reducirá a

$$10 \cdot \frac{3}{2} \cos 60° - B \cdot 2 \cos 60° = 0$$

pues los momentos de la fuerza de 10 kp y de la B son de signos contrarios; despejando B queda

$$B = 7{,}5 \text{ kp}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación 6.6 *bis* se obtiene

$$A = 2{,}5 \text{ kp}$$

con lo que queda resuelto el problema.

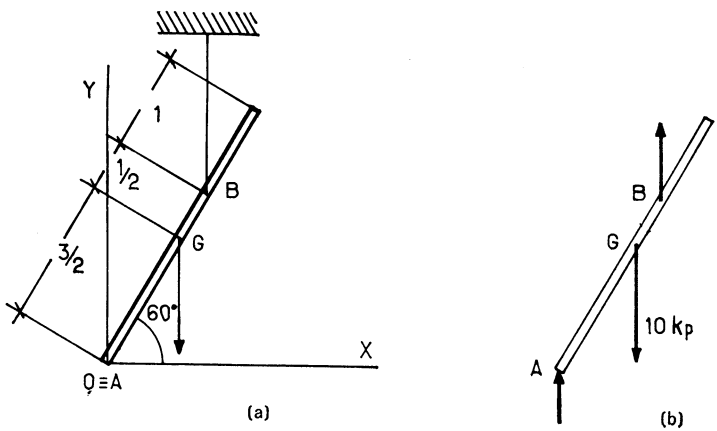


FIG. 6.2 (*a*) Las distancias están expresadas en metros. (*b*) Diagrama para el sólido libre.

Casos particulares:

Un sólido libre no puede estar en equilibrio bajo la acción de una *sola* fuerza, ya que no podría ser nula la resultante general.

Bajo la acción de dos fuerzas, sólo estará en equilibrio si tienen igual módulo y recta soporte siendo opuestos sus sentidos, pues dos vectores opuestos constituyen un sistema equivalente a cero. Si no tuvieran la misma recta soporte, la resultante general sería nula, pero no el momento. El sistema sería un *par* (cfr. § 2.5) *de fuerzas* y no se cumpliría la segunda de las ecuaciones 6.4.

Dejamos como ejercicio al lector demostrar que si son tres las fuerzas aplicadas a un sólido en equilibrio, deben ser coplanarias y concurrentes (el punto de concurso puede estar, eventualmente, en

el infinito y en tal caso las fuerzas serán paralelas, una de sentido opuesto al de las otras dos).

También puede demostrarse que, en el caso de fuerzas coplanarias, las condiciones de equilibrio (ec. 6.6) pueden reducirse a la anulación del momento resultante respecto a dos puntos del plano y anulación de la suma de las componentes de las fuerzas según un eje que no sea perpendicular a la recta determinada por los dos puntos citados. O también pueden reducirse a la anulación del momento resultante respecto a tres puntos del plano que no estén alineados.* En cualquier caso, nunca se tienen más de tres condiciones de equilibrio independientes y como al elegir como centro de reducción de momentos un punto de la recta soporte de una fuerza incógnita el momento de ésta ya sabemos que es nulo, la fuerza no figurará en la ecuación correspondiente, con lo que se ha eliminado una incógnita y la resolución del problema puede ser más sencilla. Esto es lo que se ha hecho en el ejemplo presentado anteriormente, en el cual se tomó como centro de reducción el punto A y se logró una ecuación en la que sólo figuraba la incógnita B.

Si se tratara de un sistema plano de fuerzas concurrentes, todos los momentos respecto al punto de concurso serían nulos y la tercera de las ecuaciones 6.6 sería idénticamente nula, con lo que sólo quedarían dos ecuaciones para la condición de equilibrio. Si las fuerzas fueran todas paralelas, tomando el eje Ox paralelo a ellas, la ecuación $Y = 0$ sería idénticamente nula y sólo quedarían las otras dos como condiciones para el equilibrio.

Por último, podemos considerar el caso de un cuerpo rígido con dos puntos fijos O y O', es decir (cfr. § 5.2), con un eje fijo. Las reacciones vinculares en O y O' junto con las fuerzas aplicadas forman el sistema de fuerzas exteriores y la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que este sistema sea equivalente a cero. Si a dichas reacciones las llamamos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, la condición $\mathbf{R} = 0$ será

$$\mathbf{F}+\mathbf{A}+\mathbf{B} = 0$$

y llamando $M_{oo'}$ al momento resultante respecto al eje OO' de las fuerzas aplicadas, será condición necesaria para el equilibrio que

$$M_{oo'} = 0 \tag{6.7}$$

pues si no, en algún punto $\mathbf{M} \neq 0$.

Esta condición es también suficiente. En efecto: El teorema 1.º de § 2.8 nos permite reducir el sistema de fuerzas aplicadas a una

* Cfr., p.ej., MERIAM, J. L.: *Mecánica*, I, *Estática*, p. 74, Reverté. Barcelona (1965).

fuerza **F** que pase por *O* y a un par de momento igual al momento resultante **M** respecto a *O* de dicho sistema de fuerzas activas. Pero la ecuación 6.7 obliga a que **M** sea perpendicular al eje *OO'* ya que el momento de **F** respecto a *O* es nulo. Por tanto, el par mencionado podrá estar constituido por dos fuerzas —**f** y **f** que pasen por *O* y *O'*, respectivamente (fig. 6.3) y estén contenidas en un plano π normal

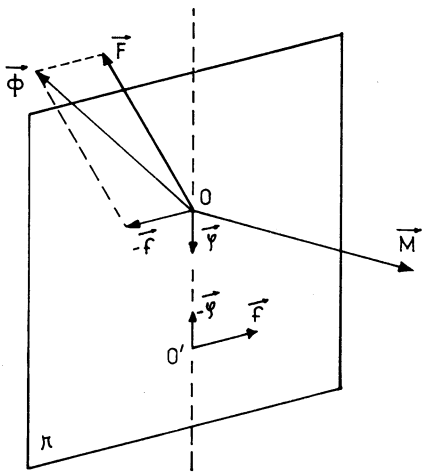


FIG. 6.3 Equilibrio de un cuerpo rígido que pueda girar alrededor de un eje fijo.

a **M**; y el sistema de fuerzas activas será equivalente al sistema de dos fuerzas $\mathbf{\Phi} = \mathbf{F} - \mathbf{f}$ y **f**, que pasan por *O* y *O'*, respectivamente. Si en *O* y *O'* consideráramos aplicadas dos fuerzas φ y $-\varphi$ soportadas por el eje, componiéndolas con $\mathbf{\Phi}$ y **f**, respectivamente, tendríamos dos fuerzas que pasarían una por *O* y otra por *O'* y que constituirían un sistema equivalente al anterior. Es decir, variando el módulo o el sentido de φ obtendríamos infinitos sistemas de fuerzas equivalentes al de las activas, con la particularidad de estar constituidos por dos fuerzas que pasarán una por *O* y otra por *O'*. Como estos dos puntos son fijos, estarán en equilibrio y ello es posible porque las reacciones vinculares **A** y **B** equilibrarán, respectivamente, a la fuerza (activa equivalente) que pasa por *O* y a la que pasa por *O'*, con lo cual el sistema de fuerzas exteriores resulta ser equivalente a cero y ésta es la condición necesaria y suficiente para el equilibrio.

Hemos considerado reacciones del eje sólo en los puntos *O* y *O'*. Si hubieran reacciones en otros puntos del eje, como todas lo cortan, sus momentos respecto a éste serían todos nulos y podríamos, en vir-

tud de lo anterior, reducir el sistema de reacciones a dos que pasaran por O y O' constituyendo un sistema equivalente, con lo que nos hallaríamos en el caso tratado.

Se comprende que si no se cumpliera la ecuación 6.7 no podríamos reducir el sistema de fuerzas activas a dos que pasaran por dos puntos del eje y no habría equilibrio posible.

Lo que acabamos de ver nos dice que *la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido que tenga un eje fijo es que sea nulo el momento resultante respecto a dicho eje del sistema de fuerzas aplicadas.* La palanca constituye el ejemplo más sencillo de este caso y de la anterior condición se obtiene la ley que rige su funcionamiento. Lo mismo podría decirse de la polea y del torno.

6.6 Estática de un sistema de cuerpos rígidos. Consideremos un conjunto deformable de cuerpos rígidos (por ej., un montón de piedras). Las fuerzas que se ejercen en cada cuerpo rígido constituyente del sistema serán: 1.° fuerzas interiores a él, las cuales mantienen invariables las distancias mutuas entre los distintos puntos del cuerpo y 2.° fuerzas exteriores al cuerpo. Estas últimas podrán ser (*a*) fuerzas ejercidas por los demás cuerpos del sistema y (*b*) fuerzas exteriores *al sistema.* Estas, a su vez, podrán ser fuerzas activas o reacciones vinculares en apoyos que puedan existir.

El sistema estará en equilibrio si lo está cada uno de sus cuerpos componentes. Las fuerzas del sistema no pueden representarse mediante un sistema de vectores deslizantes respecto al sistema, pero sí podrán considerarse las fuerzas que actúan sobre los N cuerpos del sistema como otros tantos N sistemas de vectores deslizantes, uno respecto a cada uno de los cuerpos y por tanto deberemos aplicar las ecuaciones 6.4 a cada uno de los cuerpos por separado, teniendo en cuenta que las fuerzas exteriores a cada cuerpo podrán no ser exteriores al sistema, según hemos señalado antes. Tendríamos así $2N$ ecuaciones vectoriales análogas a las ecuaciones 6.4. Sumándolas, llegamos a la conclusión de que es condición *necesaria* para el equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos que la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores al sistema sea nula y que la suma de los momentos respecto a un punto cualquiera de todas las fuerzas exteriores al sistema sea nula. La condición no es suficiente por no ser rígido el sistema en su conjunto. Pongamos un ejemplo sencillo:

Los tres cuerpos de la figura 6.4 están sometidos a las fuerzas que se indican. La acción del primero sobre el segundo es la fuerza $\mathbf{R}_1$ y la del segundo sobre el primero deberá ser, necesariamente, $-\mathbf{R}_1$ en virtud del principio de igualdad de la acción y la reacción. Análoga-

mente, la acción del segundo sobre el tercero será $\mathbf{R}_2$ y la del tercero sobre el segundo $-\mathbf{R}_2$. El primer cuerpo debe estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_{1e}$ y de $-\mathbf{R}_1$, luego $\Sigma \mathbf{F}_{1e} - \mathbf{R}_1 = 0$ y el momento resultante de todas estas fuerzas respecto a un punto dado arbitrario ha de ser nulo. Tomando dicho punto en el contacto entre el primer cuerpo y el segundo, el momento de $-\mathbf{R}_1$ será nulo

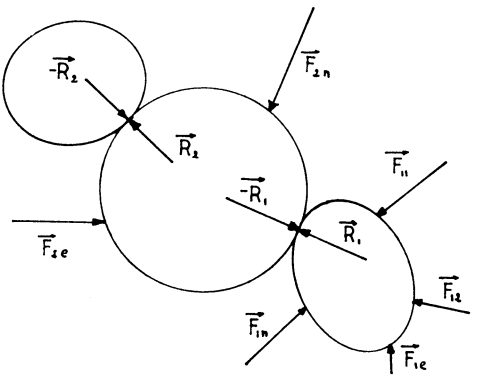


FIG. 6.4

y queda como condición necesaria y suficiente para el equilibrio *del primer cuerpo,* que sea nulo el momento resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_{1e}$ respecto a dicho punto, complementada con la ya vista de resultante general nula de las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_{1e}$ y $-\mathbf{R}_1$. Con los otros dos cuerpos actuaríamos de manera análoga.

6.7 Rozamiento. Consideremos un cuerpo en equilibrio sobre un *plano* horizontal en el que se apoya. Apliquémosle una fuerza horizontal no muy intensa y el equilibrio persiste. Ello significa que, simultáneamente con la fuerza que hemos aplicado, se aplica al cuerpo otra fuerza que la equilibra. Ésta sólo puede ejercerla el plano, por lo que será una fuerza de ligadura. Si aumentamos un poco la fuerza aplicada, el cuerpo sigue en equilibrio y ello significa que la fuerza de ligadura ha aumentado también, manteniendo el equilibrio. Ya vimos que una de las características de las fuerzas de ligadura es depender de las fuerzas aplicadas. Esta fuerza de ligadura se debe a las rugosidades de las superficies de contacto y recibe el nombre de fuerza de *rozamiento.* Si aumentamos gradualmente la fuerza aplicada, llega un momento en que el plano ya no puede oponer una fuerza mayor y el cuerpo se encuentra en el estado de *desli-*

zamiento inminente. Si aumentamos la fuerza aplicada, el cuerpo se encontrará sometido a ésta y a la máxima de rozamiento, que es inferior, por lo que se destruirá el equilibrio y deslizará.

Los hechos anteriores se presentan siempre que se intenta hacer deslizar un cuerpo sobre otro, no siendo preciso que las superficies sean planas, por lo que a este fenómeno se le conoce por el nombre de *rozamiento por deslizamiento.* La experiencia enseña que esta fuerza máxima de rozamiento, tangente a las superficies en el punto de contacto, es proporcional a la componente normal de la reacción vincular en el punto de contacto. Así, llamando **r** a la fuerza máxima de rozamiento y N a la componente normal de la reacción vincular **R**, ésta formará con la normal (fig. 6.5) un ángulo θ al que se llama *ángulo de rozamiento.* Sabemos que $r = \mu N$ y al coeficiente de proporcionalidad μ se le llama *coeficiente de rozamiento estático,* el cual es característico de la constitución física de las superficies en contacto y no depende de su área. Según se ve en la figura 6.5,

$$r/N = \text{tg } \theta \qquad \text{por lo que} \qquad \mu = \text{tg } \theta$$

El ángulo de rozamiento determina un cono de revolución con vértice en O y eje la normal, al cual se llama *cono de rozamiento.*

Como la fuerza de rozamiento nunca puede tener módulo mayor que r y éste es el valor de la componente tangencial de **R**, si la fuerza de rozamiento no es la máxima, la reacción vincular deberá quedar en el interior del cono de rozamiento y sólo cuando se alcance el deslizamiento inminente se hallará **R** sobre la superficie cónica. Cuando un cuerpo desliza sobre otro, la experiencia enseña que la fuerza de rozamiento es de módulo algo inferior a r. Se habla entonces de un *coeficiente de rozamiento cinético,* algo inferior al estático.

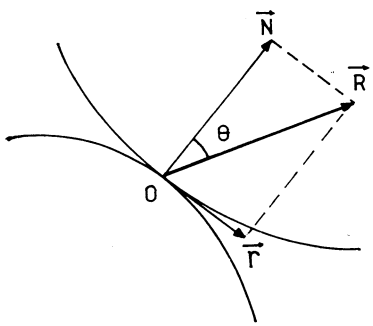


FIG. 6.5 Ángulo de rozamiento.

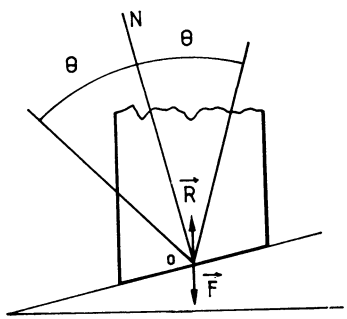


FIG. 6.6 Cono de rozamiento en la cuña.

6.8 Irreversibilidad de la cuña. Consideremos la cuña de la figura 6.6, una de cuyas caras se apoya siempre sobre un plano (el horizontal en fig. 6.6) y que tiene apoyado en su otra cara un cuerpo que le ejerce una fuerza **F** que forma con la normal a dicha cara un ángulo inferior al de rozamiento. Debe entenderse que el sistema de fuerzas que ejerce el cuerpo sobre la cuña equivale a la fuerza **F** aplicada en *O*. En virtud del principio de igualdad de la acción y la reacción, la cuña ejerce sobre el cuerpo un sistema de fuerzas equivalente a la reacción $\mathbf{R} = -\mathbf{F}$ aplicada en *O*, y como es interior al cono de rozamiento, el sistema no desliza ni deslizará aunque se aumente el módulo de **F** mientras no se varíe su dirección. Por ello, aplicando lateralmente una fuerza, puede introducirse una cuña entre dos cuerpos separándolos y al dejar de aplicar la fuerza lateral la cuña no vuelve atrás a causa de las acciones de dichos cuerpos si se está en las condiciones anteriores, que en el ejemplo dado se reducen a que el ángulo de la cuña (que es igual al que forma **R** con la normal) sea inferior al ángulo de rozamiento. Este fenómeno se conoce con el nombre de *irreversibilidad de la cuña.*

El problema del tornillo es análogo, pues podemos considerar descompuesta la rosca en porciones suficientemente pequeñas para ser consideradas planos inclinados que soportan cargas oblicuas (como la cuña). De esta manera, podemos hacer girar el tornillo venciendo la carga, pero si ésta forma con la normal al filete un ángulo inferior al de rozamiento, será incapaz de hacer deslizar la rosca en sentido contrario una vez suprimida la acción exterior atornilladora. En tal caso se tiene *irreversibilidad del tornillo.*

6.9 Rozamiento por rodadura y por pivotamiento. En el § 6.7 hemos considerado dos cuerpos en contacto en un punto. No obstante, en realidad, el contacto no es puntual, sino según una zona poco extensa desde el punto de vista macroscópico, contendrá multitud de puntos de contacto (fig. 6.7 *a*) y en todos ellos tendrá reacciones vinculares como la **R** de la figura 6.5. Tendremos, pues, un sistema de fuerzas que sabemos puede reducirse a una fuerza que pase por un punto *O* de la zona y a un par de momento **M**. Éste puede descomponerse en dos, uno $\mathbf{M}_p$ dirigido según la normal (fig. 6.7 *b*) y otro $\mathbf{M}_r$ tangente a las superficies. Éste puede equilibrar un par aplicado cuyo momento sería tangente y que, según veremos más adelante, haría rodar un cuerpo sobre el otro. Por ello, $\mathbf{M}_r$ mide la resistencia a la rodadura. En cambio, $\mathbf{M}_p$ puede equilibrar a un par de momento normal en *O* a la superficie, el cual, según se verá, haría que el cuerpo pivotara sobre el otro, es decir, girara alrededor de la normal como

lo haría un trompo sobre el suelo. Por ello $\mathbf{M}_p$ mide la resistencia al pivotamiento.

Interponiendo entre las superficies en contacto determinados productos llamados *lubricantes,* se hace disminuir el coeficiente de rozamiento y por tanto se disminuye el rozamiento por deslizamiento. Pero ello haría disminuir las fuerzas **r** en cada uno de los puntos de la región de contacto, las cuales no son coplanarias, sino que tendrán,

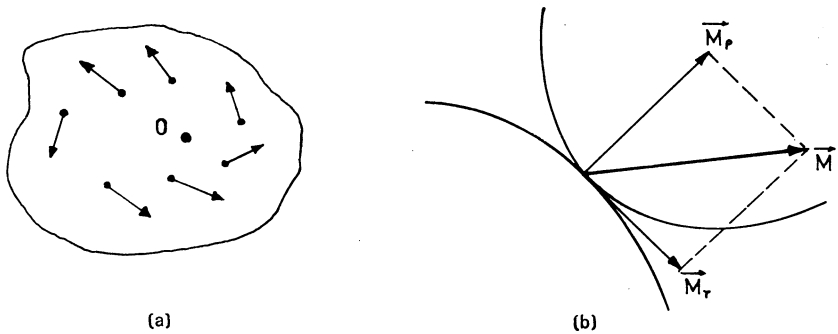


FIG. 6.7 *a*) Visión ampliada de la zona de contacto. b) Momento resultante del sistema de fuerzas de contacto.

cada una de ellas, una componente dirigida según el plano tangente macroscópicamente a las dos superficies y otra componente normal a este plano. Estas últimas componentes contribuyen a $\mathbf{M}_r$, mientras que las otras contribuyen a $\mathbf{M}_p$, y al reducirlas por lubricación se reducen también sus momentos y por tanto disminuye la resistencia a la rodadura y al pivotamiento. Esta última también puede reducirse haciendo disminuir las dimensiones de la zona de contacto, pues con ello se disminuyen los brazos de momentos al estar todas las fuerzas más próximas a *O* (fig. 6.7 *a*). Por eso los volantes de los relojes se montan sobre puntas muy agudas de material muy resistente al desgaste.

6.10 Trabajo. El último concepto que vamos a tratar, en el cual sólo interviene el concepto de fuerza junto a conceptos puramente geométricos, es el de *trabajo.* Éste es una nueva magnitud física que definiremos de la siguiente manera: sea una fuerza que desplace su punto de aplicación y consideremos un campo de fuerzas que en cada punto del camino recorrido por el punto de aplicación de la fuerza el vector campo coincida con ésta; su circulación (§ 3.2) a lo largo de dicho camino es el *trabajo* realizado por la fuerza en su

desplazamiento. Todo lo dicho en el § 3.2 y siguientes para la circulación de un vector sigue siendo válido para el trabajo de una fuerza. Sus unidades de medida se definirán en el § 7.2.

6.11 Estática gráfica. Los problemas concernientes a la Estática pueden resolverse analíticamente, utilizando los conocimientos expuestos anteriormente en este capítulo. En la Técnica se utiliza frecuentemente el procedimiento gráfico que se basa en propiedades geométricas y que, en los sistemas planos, es más rápido que el método analítico. La Estática, considerada desde este punto de vista, se llama *Estática gráfica* o *Grafostática*. En las construcciones gráficas intervienen elementos geométricos: longitudes, ángulos, etc., y magnitudes físicas: fuerzas, que se representan por los correspondientes vectores. Las longitudes y los módulos de los vectores se representan a escala, aunque la escala de longitudes no tiene que ser necesariamente la misma que la de fuerzas; una y otra están limitadas por las dimensiones del diagrama total.

Los problemas más sencillos son los de composición y descomposición de fuerzas para obtener las condiciones de equilibrio en función de componentes de las fuerzas según direcciones dadas. Vamos a exponer un ejemplo:

Una pieza rectangular descansa sobre un plano horizontal. Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 hacia el exterior en dos vértices consecutivos y en la dirección de las diagonales correspondientes (fig. 6.8). Se quiere determinar dos fuerzas que se ejerzan perpendicularmente a dos lados consecutivos y hagan que el rectángulo esté en equilibrio.

Las dos fuerzas dadas concurren en el centro. Dibujémoslas a escala y hallemos la resultante R. Descompongamos ésta según las direcciones de los lados

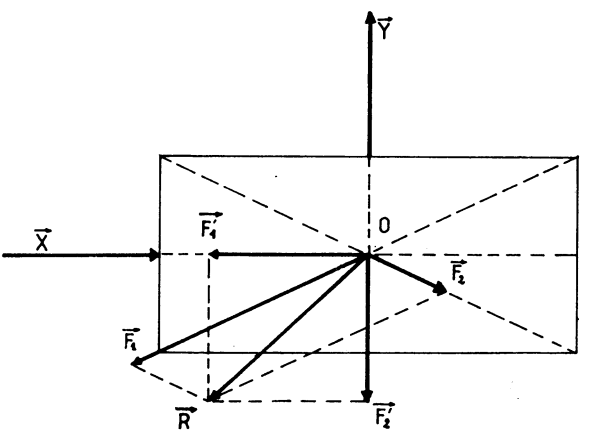


FIG. 6.8

y tendremos $\mathbf{F'}_1$ y $\mathbf{F'}_2$; las fuerzas equilibrantes **X** e **Y** son, respectivamente, de igual módulo y recta soporte que las componentes halladas, pero de sentido contrario, pues al agregarlas a las dadas constituyen un sistema de vectores equivalente a cero. Si se ha dibujado a escala $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en sus direcciones y sentidos adecuados, del propio diagrama podemos obtener las magnitudes de **X** e **Y**.

Para componer fuerzas no concurrentes coplanarias, pueden componerse de dos en dos, dado que son cursores (cfr. § 2.1) y luego componer las resultantes parciales. El método es largo y además puede darse el caso de que los puntos de concurso estén fuera de los límites del dibujo. Si las fuerzas son paralelas, pueden componerse también dos a dos usando el método gráfico, recordando la proporcionalidad inversa entre los módulos de las fuerzas y la distancia a la recta soporte de la resultante. Este método es ya conocido de estudios anteriores de Física elemental.

Para componer fuerzas coplanarias no concurrentes o paralelas se utiliza frecuentemente el método del *polígono funicular,* que vamos a describir a continuación.

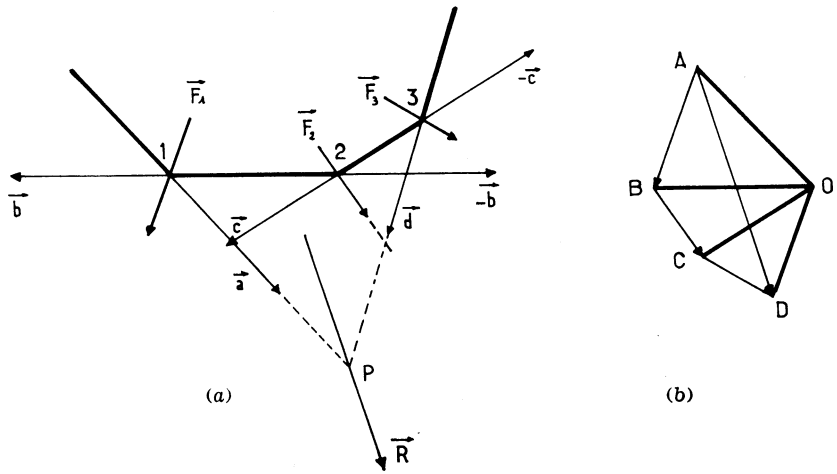


FIG. 6.9 *a*) Polígono funicular. *b*) Polígonos vectorial y dinámico.

Sean las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ (el método es completamente general, pueden ser *N* fuerzas) coplanarias, dibujadas a una escala determinada, tal como las representadas en la figura 6.9 *a*. Determinaremos la resultante general **R** construyendo el polígono de fuerzas o polígono vectorial *ABCD* (fig. 6.9 *b*). Como el sistema de fuerzas es coplanario, el trinomio invariante es nulo y dicho sistema equivale a un vector único o a un par. En el primer caso será equipolente a **R** y pasará por un punto desconocido *a priori*. Bastará determinarlo para

encontrar el sistema equivalente, es decir, la posición de **R**, para lo cual operaremos de la manera siguiente:

Tomamos un polo *O* arbitrario que unimos a los vértices *A, B, C, D* del polígono vectorial. El nuevo polígono así obtenido recibe el nombre de *dinámico*, y las diagonales trazadas desde *O*, *rayos*.

De la figura 6.9 *b* se deduce

$$\mathbf{F}_1 = B - A = (O - A) + (B - O) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{F}_2 = C - B = (O - B) + (C - O) = -\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{F}_3 = D - C = (O - C) + (D - O) = -\mathbf{c} + \mathbf{d}$$

sumando

$$\mathbf{R} = D - A = (O - A) + (D - O) = \mathbf{a} + \mathbf{d}$$

Por un punto cualquiera (1 en fig. 6.9 *a*) del soporte de $\mathbf{F}_1$ tracemos una paralela a *OA* y otra a *OB*. Por su carácter de cursor, $\mathbf{F}_1$ podemos considerarla aplicada en el punto 1 y descomponerla en dos fuerzas equipolentes a las **a** y **b**. La recta paralela a *OB* mencionada cortará al soporte de $\mathbf{F}_2$ en el punto 2, al cual podemos considerar aplicada ésta y descomponerla en dos fuerzas equipolentes a **—b** y **c**. Obsérvese que **b** aplicada en 1 y **—b** aplicada en 2 tienen la misma recta soporte 1-2. Tracemos por 2 una paralela al rayo *OC*, la cual será soporte de la fuerza **c** mencionada y cortará al soporte de $\mathbf{F}_3$ en un punto 3. En éste podemos considerar aplicada $\mathbf{F}_3$ y descomponerla en dos fuerzas **—c** y **d**, la primera soportada por la recta 2-3 y la segunda por una paralela al rayo *OD*. Queda claro que el sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ es equivalente al de fuerzas **a, b, —b, c, —c, d,** y éste lo es al constituido por las fuerzas **a** y **d** concurrentes en un punto *P* y que pueden sustituirse por su suma vectorial **R** haciéndola pasar por *P*. Tenemos ya el sistema equivalente, es decir, la resultante en su recta soporte correspondiente. El polígono de vértices 1-2-3 y lados paralelos a los rayos es el llamado *polígono funicular*, y las prolongaciones de los lados primero y último nos determinan el punto *P* de la recta soporte de la resultante.

Pudiera ocurrir que la resultante general del sistema de fuerzas fuera nula, en cuyo caso el primer y último rayo del dinámico coinciden. En tal caso, los lados primero y último del polígono funicular tendrán igual dirección. Pero sabemos que el sistema de fuerzas se reduce a dos equipolentes a los rayos primero y último del dinámico soportadas por los lados primero y último del funicular. Por tanto, el sistema se reduce a un par de fuerzas de momento igual al producto del rayo común del dinámico (medido en la escala de fuerzas) por la

separación en el polígono funicular (medida en la escala de longitudes) de los lados primero y último. Se comprende que si éstos coinciden, también será nulo el momento del par y el sistema de fuerzas estaría en equilibrio.

Si quisiéramos hallar la equilibrante de un sistema de fuerzas, aplicaríamos una fuerza opuesta a **R** en su recta soporte, y si el sistema hubiera de equilibrarse por dos fuerzas de direcciones determinadas, descompondríamos la equilibrante —**R** en las mencionadas direcciones. Este método tiene una utilidad especial en el caso de fuerzas paralelas. Veamos un ejemplo:

Una viga horizontal está apoyada en los puntos *A* y *B*, estando sometida a tres fuerzas verticales $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$. Determinar las reacciones en los apoyos sabiendo que éstas son verticales. Esto equivale a pedir hallar dos fuerzas verticales que pasando por los apoyos equilibren el sistema.

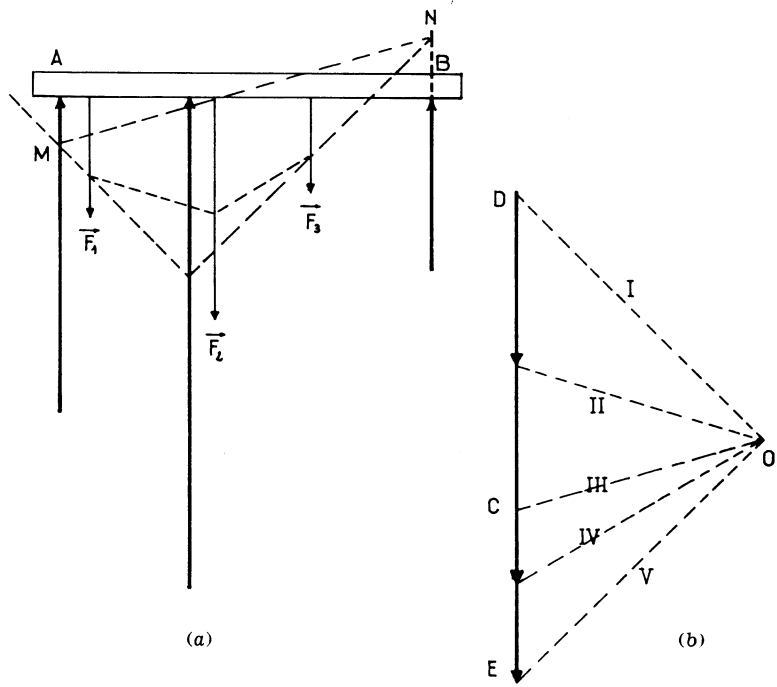


FIG. 6.10

Primero dibujaremos el polígono funicular del sistema de fuerzas conocidas (fig. 6.10 *a*) y sus lados extremos cortarán a las verticales en *A* y *B* en dos puntos *M* y *N*, respectivamente. Unamos *M* con *N* con una recta llamada

recta de cierre y desde el polo *O* del dinámico tracemos una paralela *OC* (fig. 6.10 *b*) que corta en *C* a la resultante general del polígono vectorial. Las reacciones en *A* y *B* son, respectivamente, *D*—*C* y *C*—*E*. En efecto, al agregar a las fuerzas aplicadas estas dos reacciones, el polígono de fuerzas se cierra, lo cual indica resultante general nula, pero también se cierra el polígono funicular, pues los lados extremos coinciden sobre la recta de cierre y el momento resultante también es nulo.

7

Dinámica del punto

En los capítulos anteriores hemos estudiado los movimientos sin atender a la causa que los origina o los modifica, lo cual constituye el tema de la Cinemática, y luego, en Estática, estudiábamos las fuerzas sin atender a los efectos que pueden originar, puesto que las considerábamos siempre equilibradas. Uno de los efectos a que pueden dar lugar al aplicarlas a los cuerpos es originar o alterar el movimiento de éstos, y la parte de la Física que estudia la relación entre movimientos y fuerzas recibe el nombre de *Dinámica.*

Las primeras ideas acerca del movimiento aceptadas mundialmente fueron las de ARISTÓTELES (384-322 a. C.), las cuales prevalecieron hasta el siglo XVII, en que fueron impugnadas por GALILEO, quien experimenta con cuerpos en movimiento y, en sus *Diálogos referentes a dos nuevas ciencias,* niega que ARISTÓTELES hubiera experimentado sobre la caída de los cuerpos y afirma que todos caen con igual movimiento, en contra de lo dicho por ARISTÓTELES de que los cuerpos más pesados caían más de prisa. Él, en cambio, apoya sus razonamientos en los experimentos de caída de cuerpos realizados en la torre inclinada de Pisa. Maravilla pensar que con los medios tan rudimentarios de que disponía GALILEO pudiera realizar una labor tan magnífica, la cual sirvió a NEWTON (nacido el mismo año en que murió GALILEO) para acabar de perfilar los conceptos de fuerza y masa y edificar ese grandioso edificio conocido con el nombre de *Mecánica Racional,* ciencia exacta basada en tres postulados y que, aún hoy en día, permite resolver la mayor parte de problemas prácticos. Esta Mecánica, que contiene la Cinemática Relativa de Galileo y la Estática, junto con la Dinámica newtoniana, es incapaz de explicar fenómenos en los que intervienen fuerzas aplicadas a la materia cuando ésta se deforma o cuando existen fuerzas no conservativas

(cfr. § 3.3). Estos fenómenos requieren una experimentación aparte de la que soporta los postulados de la Mecánica newtoniana y constituyen la llamada *Mecánica física,* que estudiaremos más adelante. Tampoco puede interpretar los fenómenos cuando intervengan cuerpos con celeridades próximas a la de la luz. En tal caso hay que aplicar la *Mecánica relativista* de EINSTEIN, de la cual la Mecánica newtoniana puede considerarse como una aproximación simplificativa.

7.1 Principios fundamentales de la Dinámica. Nuestro estudio va a comenzar considerando un cuerpo cuyas dimensiones geométricas sean pequeñas frente a las demás del sistema de referencia. A dicho cuerpo le llamaremos *punto material* o *partícula,* y las cuestiones referentes a su equilibrio han sido ya tratadas en el § 6.2. Veíamos que se tenía equilibrio cuando la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre él es nula. En tal caso, GALILEO afirma que *el punto material estará en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme* respecto al sistema de referencia. Esta ley se conoce con el nombre de *postulado de la inercia* y su validez queda establecida por el hecho de que las consecuencias que de él se derivan vienen corroboradas por la experiencia (salvo si intervienen velocidades del orden de la de la luz). En su obra *Diálogos referentes a los dos grandes sistemas del mundo,* GALILEO razona el postulado considerando el movimiento de una bolita en un plano inclinado: si se lanza hacia arriba, la resultante de su peso y la reacción vincular es una fuerza paralela al plano, dirigida hacia abajo, y retarda el movimiento de la bola. Si ésta se mueve hacia abajo, la misma fuerza la acelera. Luego la pendiente hacia arriba retarda y hacia abajo acelera. Por tanto, si se lanzara la bolita sobre un plano horizontal ni se retarda ni se acelera, luego su velocidad debe mantenerse constante. Con ello GALILEO derriba uno de los puntos de vista aristotélicos, cual era el de que para haber movimiento es necesaria la presencia de una fuerza. Evidentemente, la afirmación de ARISTÓTELES no carece de lógica, pues la presencia de los rozamientos obliga a aplicar fuerzas que los contrarresten si se quiere tener movimiento.

Tener un punto material en movimiento rectilíneo y uniforme era muy difícil en aquellos tiempos. No así ahora, que pueden lograrse tales condiciones en el movimiento de los electrones en un tubo de rayos catódicos.

Como el movimiento rectilíneo y uniforme es el único que carece de aceleración (cfr. § 4.3), el postulado de la inercia podría expresarse diciendo que *un punto material no puede tomar, por sí mismo, aceleración.* Es decir, que si tiene aceleración es porque un agente

exterior se la comunica aplicándole una fuerza. Ello equivale a decir que *las fuerzas son las causas de las aceleraciones.*

Este postulado de la inercia se conoce también con el nombre de *primera ley de Newton,* por haberlo elevado éste a la categoría de principio fundamental. No obstante, la *segunda ley,* ésta sí debida a NEWTON, lo contiene como caso particular. Veamos en qué consiste esta segunda ley. En primer lugar, la experiencia indica que al aplicar una fuerza a un punto material, éste adquiere una aceleración de la misma dirección y sentido que aquélla. Consideremos ahora una vagoneta cuyas ruedas están montadas sobre cojinetes bien engrasados, con lo que podremos despreciar los rozamientos. Dicha vagoneta está en una vía horizontal recta y tiramos de ella a través de un dinamómetro que nos marcará la fuerza aplicada. Con auxilio de una cinta métrica y un cronómetro podemos estudiar el movimiento de la vagoneta sometida a una fuerza **F** constante horizontal y vemos que toma una aceleración **a** de igual dirección y sentido. Repetimos el experimento aplicando fuerzas de igual dirección y sentido que **F**, cuyos módulos sean F', F'', F''', ..., y las aceleraciones observadas resultan tener por módulos a', a'', a''', ..., e igual dirección y sentido. Anotados los valores se observa que

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \frac{F'''}{a'''} = \ldots \tag{7.1}$$

El valor de este cociente no depende de la fuerza aplicada ni de la aceleración adquirida, pues siempre es el mismo. Este valor es característico del cuerpo (vagoneta) sobre el que se experimenta y ello puede comprobarse porque, al cambiar de cuerpo (cargar más la vagoneta será equivalente), el cociente que se obtiene entre fuerza aplicada y aceleración adquirida cambia de valor aun cuando sigue manteniéndose constante en la nueva experimentación. Si a dicho valor lo representamos por $k\,m$ tendríamos, despejando F en la ecuación 7.1,

$$F = k\,m\,a \tag{7.2}$$

donde k dependerá del sistema de unidades de medida que se adopte y m es característico del cuerpo y recibe el nombre de *masa inerte.* Se comprende la necesidad de introducir k con el fin de tener libertad en la elección del sistema de unidades de medida, pues si quisiéramos cambiar la unidad de medida de fuerzas sin alterar las de las otras magnitudes físicas de la ecuación 7.2, cambiará el valor del primer miembro y ello obliga a alterar el valor de k. Si nos obligamos

a trabajar en un *sistema absoluto* de unidades, es decir, en un sistema en el cual $k = 1$, la ecuación 7.2 queda en la forma

$$F = m\,a \tag{7.3}$$

y teniendo en cuenta lo dicho acerca de las direcciones y sentidos de **F** y **a**, nos queda

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \tag{7.4}$$

como expresión de la *segunda ley de Newton*. Queda implícito (confrontar § 1.5) que $m > 0$ siempre.

Si no trabajáramos en un sistema absoluto de unidades, la segunda ley se expresaría multiplicando por k el segundo miembro de la ecuación 7.4.

El significado de la masa inerte resulta fácil de ver examinando la ecuación 7.3. Si un cuerpo tiene una masa m_1 mayor que la m_2 de otro cuerpo, al aplicar a ambos una misma fuerza el primero adquirirá una aceleración menor que el segundo. Luego *la masa inerte de un cuerpo mide su resistencia a alterar su estado de movimiento.*

El tercero de los principios fundamentales de la Mecánica es el de igualdad entre la acción y la reacción, que ya enunciamos en el § 6.3. No ha lugar a ninguna modificación del enunciado y nos limitaremos a dar algún ejemplo dinámico. El más sencillo es el de la rueda motriz. Al girar la rueda (en el sentido de las agujas del reloj

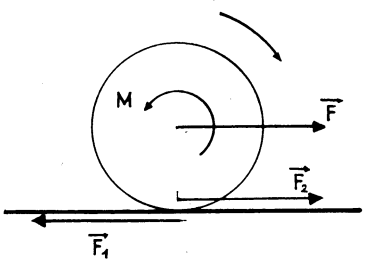


FIG. 7.1 Rueda motriz.

en la figura 7.1), aplica al suelo una fuerza $\mathbf{F}_1$ hacia atrás y el suelo aplica a la rueda una fuerza $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ hacia adelante (en el dibujo se han representado ligeramente separadas para que se vea a qué cuerpos están aplicadas, pero en realidad tienen igual recta soporte). Considerando la rueda como punto material, lo cual está justificado porque su radio es pequeño frente al de la Tierra, la cual puede constituir el sistema de referencia, la fuerza $\mathbf{F}_2$ ya explica por qué se acelera hacia adelante la rueda.

Si tomamos como sistema de referencia el vehículo movido por la rueda, no será lícito tomarla como punto material y la fuerza $\mathbf{F}_2$ aplicada al cuerpo rígido que es la rueda sabemos que equivale (confrontar §§ 6.5 y 2.8) a una fuerza **F** aplicada en su centro y a un par de sentido opuesto al de la rodadura. Éste se compone con el par motor de sentido opuesto aplicado al eje y ello afectará, según veremos, al movimiento de rotación de la rueda. En cambio, **F**, aplicada al centro, lo acelera hacia adelante, que es lo que queríamos demostrar.

Otro ejemplo lo tenemos en los motores de reacción o propulsión a chorro. El motor aplica a la masa gaseosa que expulsa una fuerza hacia atrás y la masa gaseosa aplica al motor una fuerza hacia adelante que lo acelera.

Insistimos en que acción y reacción, por estar aplicadas a cuerpos diferentes, no se contrarrestan. El motor a reacción no tiene aplicado a él la fuerza que aplica al chorro y sólo se halla sometido a la reacción de éste.

7.2 Unidades de masa, fuerza y trabajo. Estamos ya en condiciones de definir las unidades de medida de las magnitudes físicas vistas hasta ahora. Los sistemas a que vamos a hacer referencia son dos, ambos absolutos. Ambos se definen a partir de unidades establecidas independientemente para la longitud, la masa y el tiempo. Éste se mide en segundos en ambos sistemas.

Como unidad de masa puede tomarse la de un cilindro de platino iridiado que se conserva en el pabellón Breteuil de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres (Francia) y que lleva el nombre de *kilogramo* (kg). Tomando el metro como unidad de longitud,* tendremos el sistema SI en el cual la unidad de fuerza es el *newton* (N), que se define como *la fuerza que aplicada a una masa de 1 kg le comunica la aceleración de 1* m/s^2.

Si como unidad de masa se toma el gramo (g), que es la milésima parte del kilogramo, y como unidad de longitud se toma el centímetro, tendremos el sistema cegesimal (cgs) y en él la unidad de fuerza es la *dyna*, que se define como *la fuerza que aplicada a una masa de 1 g le comunica una aceleración de 1* cm/s^2.

Fácilmente puede comprobarse que

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dynas}$$

En el sistema SI, la unidad de trabajo es el *joule* (J), que se

* En Óptica se dará una definición precisa del metro.

define como *el trabajo que realiza una fuerza de 1 N cuando desplaza su punto de aplicación 1 m en su propia dirección y sentido.* En el sistema cgs, la unidad de trabajo es el *erg,* definido como *el trabajo que realiza una fuerza de 1 dyna cuando desplaza su punto de aplicación 1 cm en su propia dirección y sentido.* La equivalencia entre el joule y el erg se ve fácilmente que es

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$$

DIMENSIONES FÍSICAS. Cambiar de sistema de unidades significa cambiar las unidades de las magnitudes fundamentales del sistema (longitud, masa y tiempo en los sistemas absolutos mencionados) y ello lleva consigo el cambio de las demás unidades llamadas derivadas. Este cambio puede realizarse fácilmente con ayuda de la llamada *ecuación de dimensión* de la magnitud que interesa expresar en el nuevo sistema. Dicha ecuación es una relación simbólica que nos dice cómo varía la unidad derivada al variar las fundamentales. Por ejemplo, al pasar del sistema SI al cgs, la unidad de tiempo no varía. La unidad de longitud es cien veces menor, por lo que los números que midan longitudes serán cien veces *mayores.* Lo mismo podemos decir de las unidades de velocidad y de aceleración. Si quisiéramos expresar la velocidad en km/h, como el km es mil veces mayor que el metro y la hora 3600 veces mayor que el segundo, la velocidad en m/s deberá dividirse por 1000 y multiplicarse por 3600. Ello puede simbolizarse así: Si la velocidad es de 20 m/s,

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{1000} \frac{\text{km}}{\text{m}} \cdot 3600 \frac{\text{s}}{\text{h}} = 72 \text{ km/h}$$

o bien, diciendo que la ecuación de dimensión de la velocidad es

$$[V] = L\,T^{-1}$$

que se expresa diciendo que las dimensiones de la velocidad son 1 respecto a la longitud y —1 respecto al tiempo.

Análogamente, la ecuación de dimensión de la aceleración será:

$$[a] = L\,T^{-2}$$

y la de la fuerza

$$[F] = M\,L\,T^{-2}$$

en virtud de la ecuación 7.3.

En consecuencia, la definición de trabajo nos dice que

$$[W] = M L^2 T^{-2}$$

Las equivalencias mencionadas anteriormente entre las unidades SI y cgs de fuerza y trabajo pueden hallarse ahora haciendo

$$M = 1000 \text{ kg/g} \qquad L = 100 \text{ m/cm} \qquad T = 1 \text{ s/s}$$

Como toda ley física debe cumplirse independientemente de cuál sea el sistema de unidades adoptado, la ecuación que la representa deberá ser *homogénea dimensionalmente,* pues si no, una igualdad podría ser cierta al medir sus magnitudes en unas unidades y no serlo al medirlas en otras. Por ejemplo, supongamos que una ecuación cumpliera la siguiente relación dimensional: $L = T + L\,T$. Al pasar del sistema SI al cgs, el primer miembro y el segundo término del segundo miembro quedan multiplicados por 100, mientras que el primer término del segundo miembro no varía, por lo que si la ecuación que rija la ley se cumplía al expresar las magnitudes en unidades SI no se cumpliría al medirlas en unidades cgs. Esto es absurdo, y como el cambio de sistema de unidades equivale a multiplicar las fundamentales por sendos números k_1, k_2 y k_3, si todos los términos son dimensionalmente homogéneos, de la forma $M^\alpha L^\beta T^\gamma$, el cambio de unidades hará que todos queden multiplicados por la misma cantidad $k_1^\alpha k_2^\beta k_3^\gamma = K$, que será el factor de transformación de la magnitud de dimensión $M^\alpha L^\beta T^\gamma$, al poder sacarlo factor común.

7.3 Sistemas inerciales. Los movimientos se describen siempre con relación a un sistema de referencia. Ahora bien, la descripción dependerá del sistema, pues dados dos de ellos, en movimiento uno respecto a otro, sus aceleraciones **a** y $\mathbf{a}_r$ están relacionadas por la ecuación 5.24 y no serán siempre iguales. Ello supone que, en este último caso, la ecuación 7.4 no podrá ser cierta en ambos sistemas.

Ejemplo: En el interior de un avión que caiga libremente (es decir, con aceleración $g = 9{,}8$ m/s^2), los cuerpos parecen flotar en el aire, como si no tuvieran peso. Un observador situado en la Tierra ve que dichos objetos caen con una aceleración $g = 9{,}8$ m/s^2, igual que el avión. Pero un observador interior al avión los ve en reposo, y como no observa ninguna fuerza aplicada (pues está en condiciones de *ingravidez*), considera esta situación como una consecuencia directa del principio de la inercia. Si aplica a un objeto una fuerza, observará que adquiere una aceleración que cumple con la segunda ley de Newton. Luego el avión en caída libre constituye un sistema en el cual la ecuación 7.4 es cierta. En cambio, el observador terrestre, si intenta relacionar la fuerza aplicada al cuerpo con la aceleración que *él* observa, que será la

resultante de componer la aceleración observada por el piloto con la de caída, no considerará válida la ecuación 7.4.

Desde un principio se buscó un sistema de referencia en el cual fueran válidas las leyes de Newton. Como su comprobación experimental más precisa la constituye la Mecánica Celeste, cuyas leyes se basan todas en las de Newton y estaban referidas al sistema llamado de Copérnico, cuyo origen está en el centro del Sol y los ejes quedan determinados por las estrellas fijas, se consideró que este sistema era el idóneo para la aplicación de las leyes de Newton. En tal caso, la aceleración $\mathbf{a}_r$ referida a otro sistema en movimiento respecto al de Copérnico estará relacionada con la aceleración $\mathbf{a}$ en éste por la ecuación 5.24 y sólo serán iguales si

$$\mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c = 0 \tag{7.5}$$

siempre. El valor de $\mathbf{a}_c$ depende de la velocidad relativa, por lo que si ha de tener un valor independiente de ésta, la ecuación 5.23 nos dice que ha de ser $\omega = 0$, lo que indica que el movimiento del sistema respecto al de Copérnico ha de ser de traslación. Pero, además, ha de ser nula la aceleración de arrastre y ello significa que la traslación ha de ser uniforme. Luego *todo* sistema que se mueva respecto al de Copérnico con movimiento de traslación uniforme cumplirá la ecuación 7.5 y por tanto en él serán válidas las leyes de Newton. A dichos sistemas se les da el nombre de *inerciales.*

7.4 Fuerzas de inercia. La ecuación 7.4, pues, sólo es válida en los sistemas inerciales. Por tanto, si nos vemos obligados a realizar medidas en un sistema no inercial no podremos aplicar directamente las leyes de Newton. Ahora bien, tomemos un sistema inercial como sistema S' (§ 5.6) y nuestro sistema como sistema S. Nosotros mediremos la aceleración relativa $\mathbf{a}_r$, y la que debe intervenir en la ecuación 7.4 es la absoluta $\mathbf{a}$, estando ambas relacionadas por la ecuación 5.24. Multiplicando los dos miembros de ésta por m, el primer miembro será la fureza $\mathbf{F}$ aplicada al cuerpo de masa m. Si llamamos

$$\mathbf{F}_{ia} = -m\,\mathbf{a}_a \qquad \mathbf{F}_{ic} = -m\,\mathbf{a}_c \tag{7.6}$$

tendremos

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ia} + \mathbf{F}_{ic} = m\,\mathbf{a}_r \tag{7.7}$$

Las expresiones 7.6 son, respectivamente, las llamadas *fuerza de inercia de arrastre* y *fuerza de inercia de Coriolis,* y la ecuación 7.7 se interpreta diciendo que si queremos aplicar la segunda ley de

Newton en un sistema no inercial, habrá que añadir a las fuerzas reales las fuerzas de inercia. Éstas son fuerzas ficticias por no estar aplicadas por ningún cuerpo y, en consecuencia, no tienen reacción. Es natural, pues la tercera ley sólo es aplicable a sistemas inerciales. Entre las fuerzas de inercia, podemos citar la fuerza centrífuga que es opuesta a la centrípeta.

7.5 Energía cinética. La ecuación 7.4 podemos escribirla en la forma

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

y si el punto material de masa m sufre un desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{s}$, la fuerza aplicada a él realizará un trabajo

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v} = m\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{7.8}$$

Ahora bien:

$$v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

y diferenciando

$$\mathrm{d}(v^2) = 2\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v}$$

que sustituida en la ecuación 7.8 da

$$\mathrm{d}W = m\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}(v^2) = \mathrm{d}(\tfrac{1}{2}\,m\,v^2) \tag{7.9}$$

Si el punto recorre un camino finito entre A y B, podremos descomponerlo en desplazamientos elementales y el trabajo total será igual a la suma de los trabajos elementales (ec. 7.9) realizados en los infinitos desplazamientos. Cada uno de aquéllos es igual, según la ecuación 7.9, al incremento que sufre la función $\frac{1}{2}\,m\,v^2$, llamada *energía cinética* del punto. La suma de todos los trabajos será, pues, igual a la suma de los incrementos de energía cinética, o sea al incremento total de ésta. Es decir,

$$W = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B{}^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_A{}^2 \tag{7.10}$$

Esto constituye el enunciado del llamado *teorema de las fuerzas vivas,* que nos dice que *el trabajo total de las fuerzas que se ejercen sobre un punto material es igual al incremento de su energía cinética.*

7.6 Energía mecánica; su conservación. Al concepto de energía se llega intuitivamente, de manera gradual. Siempre que al realizar

un trabajo sobre un cuerpo, o sobre un sistema, exista una cierta magnitud física que se incremente en una cantidad igual al trabajo entregado (esto exige que tenga sus mismas dimensiones), diremos que dicha magnitud es una *energía*. La ecuación 7.10 nos dice que el trabajo entregado al punto material es igual al incremento de la magnitud $\frac{1}{2} m v^2$, por lo que ésta es una energía. Como depende del movimiento que tenga el punto, se le llama cinética.

Supongamos ahora que la fuerza resultante que se ejerce sobre el punto material de masa m pueda expresarse como producto de m por un vector definido por un campo conservativo. Diremos entonces que se trata de una *fuerza conservativa*. El trabajo será igual al producto de m por la circulación del campo conservativo, o sea al producto de m por la disminución del potencial correspondiente (cfr. § 3.3). Al producto de m por el potencial se le llama *energía potencial* y tendremos, en virtud de la ecuación 7.10,

$$m\,(V_A - V_B) = \tfrac{1}{2}\, m\, v_B{}^2 - \tfrac{1}{2} m\, v_A{}^2$$

o sea

$$m\, V_A + \tfrac{1}{2}\, m\, v_A{}^2 = m\, V_B + \tfrac{1}{2}\, m\, v_B{}^2$$

Como vemos, al moverse el punto material, la suma de sus energías potencial y cinética es la misma en dos puntos cualesquiera. Llamando *energía mecánica* a dicha suma, lo anterior puede resumirse diciendo que *cuando las fuerzas que se ejercen sobre el punto derivan de un potencial, la energía mecánica se conserva.*

7.7 Potencia; acción. Supongamos que queremos llevar dos toneladas de ladrillos desde la calle hasta un segundo piso. Un hombre puede hacerlo subiendo los ladrillos de dos en dos, lo cual supone que en cada viaje realizará un trabajo doble del necesario para llevar un ladrillo de la calle al segundo piso. Tras múltiples viajes habrá llevado todos los ladrillos y el trabajo realizado será el correspondiente a elevar dos toneladas a la altura del segundo piso. Este mismo trabajo sería el que realizara un montacargas subiendo las dos toneladas de una vez. No obstante, el hombre habrá empleado toda una tarde en realizar este trabajo y el montacargas lo habrá realizado en dos minutos. El montacargas tiene mayor potencia que el hombre.

De una manera general, cuando una fuerza realiza un trabajo dW en un tiempo dt, diremos que desarrolla una potencia

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Si se mantiene P constante y llamamos W al trabajo realizado entre los instantes t_0 y t_1 será

$$P = \frac{W}{t_1 - t_0}$$

Si la fuerza está aplicada a un punto material

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

que sustituida en la ecuación de la potencia da

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Las dimensiones de la potencia son, claro está, $M L^2 T^{-3}$. Sus unidades de medida, que podemos definir ahora, son: el erg/s para el sistema cgs, y el *watt* (W) para el sistema SI. Es decir, 1 W es la potencia desarrollada por una fuerza que realiza un trabajo de 1 J cada segundo. Se utiliza muchas veces como unidad de potencia el *kilowatt* (kW), que equivale a mil watt.

También podemos definir ahora una unidad de energía, muy en boga actualmente, cual es el *kilowatt-hora* (kWh), que es el trabajo que realiza durante una hora un motor de potencia 1 kW. Como la hora tiene 3600 s, se deduce que

$$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Otra magnitud física que mencionaremos es la *acción*. No debemos confundirla con fuerza, a pesar de que muchas veces se dice que la fuerza es la acción que un cuerpo ejerce sobre otro. De una manera elemental, podría definirse como el producto de un trabajo por el tiempo durante el cual se realiza. Esta definición no es exacta, pues carece de significado, pero nos enseña que las dimensiones de una acción son: $M L^2 T^{-1}$. No es fácil definirla, como tampoco lo es definir la energía con toda generalidad. Podremos considerar que se trata de una magnitud que describe la condición de todo sistema dinámico que puede expresarse como el doble de la energía cinética media del sistema durante cierto intervalo de tiempo, multiplicada por la duración de dicho intervalo. Sus unidades serán el joule-segundo (J·s) y el erg·s.

7.8 Impulso de una fuerza y cantidad de movimiento. Hemos visto que las fuerzas alteran los movimientos y la modificación que éstos sufran dependerá, lógicamente, del tiempo durante el cual actúe la fuerza. Por ello, conviene definir un vector que sea el producto

de la fuerza por el tiempo durante el cual se ejerza. Ahora bien, ello exige que la fuerza pueda representarse por un vector constante durante dicho tiempo, y como las fuerzas pueden ser variables con el tiempo, el intervalo temporal durante el cual actúe la fuerza deberemos dividirlo en intervalos de tiempo suficientemente cortos para que la fuerza pueda considerarse constante en cada uno de ellos. Así pues, tomando un intervalo de tiempo infinitesimal dt, llamaremos impulso elemental al vector

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}\, dt \tag{7.11}$$

Si ahora sumamos los impulsos elementales correspondientes a todos los intervalos infinitesimales en que hemos descompuesto el intervalo finito de tiempo (t_0, t_1) tendremos el *impulso de la fuerza* durante este intervalo finito

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\, dt \tag{7.12}$$

Por otra parte, si un punto material de masa m tiene una velocidad $\mathbf{v}$, podremos asociar a aquél un vector $m\mathbf{v}$ llamado *cantidad de movimiento* del punto y cuyo significado es inmediato si se atiende a la definición de producto de un escalar por un vector (§ 1.5).

Sustituyendo la ecuación 7.4 en la 7.11 se tiene

$$d\mathbf{I} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}dt = m\, d\mathbf{v} = d(m\,\mathbf{v}) \tag{7.13}$$

que nos indica que el impulso elemental es igual al incremento de cantidad de movimiento que origina. La suma de los impulsos elementales durante el intervalo (t_0, t_1) será igual a la suma de los incrementos de cantidad de movimiento, o sea al incremento total, que es igual a la diferencia entre la cantidad de movimiento final y la inicial. Luego la ecuación 7.12 queda en la forma

$$\mathbf{I} = m\,\mathbf{v}_1 - m\,\mathbf{v}_0 \tag{7.14}$$

donde $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_1$ son las velocidades en los instantes t_0 y t_1, respectivamente. Esta última ecuación expresa el *teorema de la cantidad de movimiento* que dice: *el impulso de una fuerza es igual a la variación de cantidad de movimiento que origina.*

Si representamos por $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ a la cantidad de movimiento de un punto, las ecuaciones 7.11 y 7.13 nos permiten escribir

$$\mathbf{F}\, dt = d\mathbf{p}$$

de donde

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.15}$$

relación que siendo equivalente a la ecuación 7.4 tiene mayor generalidad, pues también es válida en Mecánica Relativista, donde la masa inerte no es constante, sino dependiente de la celeridad. La ecuación 7.15 puede constituir una definición de fuerza diciendo que ésta es igual a la variación de cantidad de movimiento por unidad de tiempo, o que es *la cantidad de movimiento por unidad de tiempo que se comunica al punto material.*

El carácter vectorial de la ecuación 7.14 queda bien claro con el siguiente ejemplo:

Una pelota de tenis cuya masa es $m = 50$ g se mueve horizontalmente con celeridad $v = 10$ m/s cuando se le aplica un impulso que forma 30° con la horizontal, por encima de ella y en el sentido de rechace de la pelota. El impulso es instantáneo y de 1 N·s. Determinar la velocidad de la pelota inmediatamente después de aplicado el impulso.

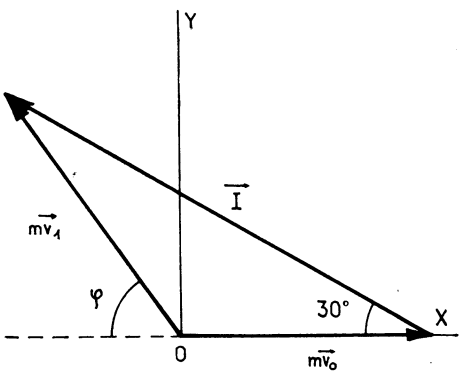


FIG. 7.2 El impulso es igual a la variación de cantidad de movimiento que origina.

Despejando $m\,v_1$ en la ecuación 7.14 nos queda como suma vectorial del impulso y la cantidad de movimiento inicial. Tomando la dirección horizontal como eje Ox (fig. 7.2) tendremos

$$m\,v_{x_1} = m\,v_0 - I\,\cos\,30°$$

$$m\,v_{y_1} = I\,\text{sen}\,30°$$

Operando en el sistema giorgi, $m = 0{,}05$ kg, $v_0 = 10$ m/s e $I = 1$ N·s, y del sistema anterior resulta

$$m\,v_{x_1} = -0{,}366 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$m\,v_{y_1} = 0{,}500 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{0{,}500}{0{,}366} = 53^\circ\ 48'$$

Es evidente que la unidad SI de impulso (N · s) y la de cantidad de movimiento, sólo falta determinar la celeridad. El módulo de la cantidad de movimiento final será

$$m\,v_1 = \sqrt{(-0{,}366)^2 + (0{,}500)^2} = 0{,}62 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

y dividiendo por la masa $m = 0{,}05$ kg queda

$$v_1 = 12{,}4 \text{ m/s}$$

Es evidente que la unidad SI de impulso (N · s) y la de cantidad de movimiento (kg·m·s^{-1}) son una misma unidad, pues la ecuación de dimensiones del impulso y de la cantidad de movimiento es la misma: $M\,L\,T^{-1}$.

7.9 Momento cinético. Dado un punto P en movimiento, llamaremos momento cinético de P respecto a un polo O, o respecto a un eje E, al momento respecto al polo, o respecto al eje, del vector cantidad de movimiento de P. Así pues, representando por $\mathbf{L}$ el momento cinético de P respecto a O, será

$$\mathbf{L} = (P - O) \wedge \mathbf{p} \tag{7.16}$$

donde $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento del móvil P.

Derivando respecto al tiempo la ecuación 7.16 tenemos:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{p} + (P - O) \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

El primer término del segundo miembro es nulo por ser el producto vectorial de dos vectores de igual dirección, y recordando la ecuación 7.15 queda

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = (P - O) \wedge \mathbf{F}$$

pero el segundo miembro de esta ecuación no es sino el momento $\mathbf{M}$ respecto a O de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada al punto P, luego

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \tag{7.17}$$

la derivada temporal del momento cinético de un móvil respecto a un punto O es igual al momento respecto a O de la fuerza que se ejerce sobre el punto material móvil. Éste es el llamado *teorema del momento cinético.* De la ecuación 7.17 resulta

$$\mathbf{M}\,dt = d\mathbf{L} \tag{7.18}$$

El primer miembro recibe el nombre de *impulso angular elemental* y vemos que es igual al incremento de momento cinético que origina. Si consideráramos un intervalo finito de tiempo (t_0, t_1) podríamos descomponerlo en intervalos infinitesimales y la suma de los impulsos elementales correspondientes es lo que llamamos *impulso angular* total. La ecuación 7.18 nos indica que éste será igual a la suma de los incrementos de momento cinético que originan, o sea al incremento total de momento cinético, luego

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{M}\,dt = \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_0 \tag{7.19}$$

donde $\mathbf{L}_0$ es el momento cinético respecto a O en el instante t_0 y $\mathbf{L}_1$ es el momento cinético respecto a O en el instante t_1. Podemos decir, pues, que *el impulso angular es igual a la variación de momento cinético que origina.*

7.10 Fuerzas centrales; ley de las áreas. Cuando un punto material se mueve por la acción de una fuerza que siempre pasa por un punto O fijo del espacio, se dice que está sometido a una *fuerza central.* El punto O recibe el nombre de centro de fuerzas, y como el momento de la fuerza aplicada al punto material P será siempre nulo respecto a O, la ecuación 7.17 nos dice que el vector $\mathbf{L}$, momento cinético respecto a O, será constante. Pero la constancia de un vector exige constancia en su dirección y sentido, tanto como en su módulo. Como $\mathbf{L}$ ha de ser, por definición (§ 2.2), normal al plano determinado por O y la cantidad de movimiento y ésta es tangente a la trayectoria, la invariabilidad de la dirección de $\mathbf{L}$ lleva consigo la invariabilidad de la orientación del plano determinado por O y la tangente a la trayectoria. Luego *si un punto se mueve bajo la acción de una fuerza central, su trayectoria es plana.*

Consideremos dos posiciones P y P' muy próximas del punto móvil (fig. 7.3). El vector de posición barre, al pasar de P a P', un área

$$dA = \tfrac{1}{2}\,|\,\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}\,| \tag{7.20}$$

pues el módulo del producto vectorial es igual al doble del área del triángulo determinado por los dos factores ($\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}$ en este caso). Si

es dt el tiempo que emplea el móvil en pasar de la posición P a la P', dividiendo por dt los dos miembros de la ecuación 7.20 queda

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}|$$

y multiplicando y dividiendo por m el segundo miembro,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}| = \frac{L}{2m} \tag{7.21}$$

El primer miembro es la llamada *velocidad areolar* o área barrida por el radio vector en unidad de tiempo, y como el segundo miembro

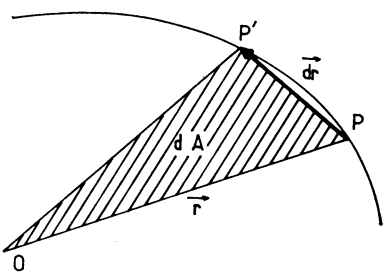


FIG. 7.3 Ley de las áreas.

es constante, por serlo L, podemos enunciar la *ley de las áreas*, que dice: *Cuando un punto material se mueve bajo la acción de una fuerza central, su trayectoria es plana y las áreas barridas por el radio vector son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.*

7.11 Gravitación. Los conocimientos adquiridos acerca de la Dinámica del punto material, junto con los adquiridos en el capítulo 3 acerca de campos centrales, nos permiten abordar ahora el interesante tema de la Gravitación Universal.

De muchos es conocida la anécdota de NEWTON y la manzana. Al verla caer despertó en él la inquietud de explicar por qué caen los cuerpos. El problema era muy antiguo y las explicaciones dadas por los filósofos griegos no satisfacían al inquieto estudiante que era entonces ISAAC NEWTON. Pensó que si caía se debía a que la Tierra le ejercía una fuerza atractiva y que ésta se ejercía sobre todos los cuerpos próximos. ¿Próximos? ¿Hasta qué distancia alcanzaría la atracción terrestre? No había razón para fijar un límite, y así NEWTON quiso interpretar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra

como debido a dicha atracción. Sus primeros cálculos le condujeron a un resultado poco satisfactorio, pues el período de revolución de la Luna alrededor de la Tierra no concordaba con el calculado. Pocos años después se descubrió que la distancia de la Tierra a la Luna considerada hasta entonces era errónea, y al rehacer NEWTON los cálculos con el nuevo valor, los resultados obtenidos concordaban satisfactoriamente con los experimentales. El pensamiento de NEWTON generalizó las ideas fundamentales y, guiado por los conocimientos que tenía acerca del movimiento de los planetas, estudiado empíricamente por KEPLER en tiempos de GALILEO, llegó a la conclusión de que en el Universo *dos cuerpos se atraen siempre con una fuerza proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.* Esto puede simbolizarse mediante la expresión

$$F = G\frac{m\,m'}{r^2} \tag{7.22}$$

donde F es el módulo de la fuerza de atracción que se ejercen los dos cuerpos de masas m y m' separados por una distancia r. G es la llamada *constante de la gravitación universal.* El hecho de que se hable de *la distancia r* que separa los cuerpos indica que las dimensiones de éstos son muy pequeñas frente a r, por lo que no se comete error sensible al tomar distancias a un punto u otro de un mismo cuerpo.

Si dividimos los dos miembros de la ecuación 7.22 por m' tendremos la atracción que la masa m ejerce en un punto cualquiera, a distancia r, sobre una unidad de masa. A cada punto del espacio que rodea a m le podemos asociar un vector que mida dicha atracción y tendremos un campo central al que llamaremos *campo gravitatorio* creado por m. Su expresión coincidirá con la ecuación 3.8 si hacemos $c = -G\,m$, por lo que el campo será newtoniano. El signo — se debe a que el campo tiene el sentido de acercamiento a m.

Según la ecuación 3.9, su potencial será

$$V = -\frac{G\,m}{r} \tag{7.23}$$

si lo consideramos nulo en el punto del infinito. Como el campo gravitatorio es la fuerza ejercida sobre la unidad de masa, este potencial representará el trabajo que hay que realizar *contra* las fuerzas del campo para traer desde el infinito la unidad de masa. Es negativo,

porque dicha unidad de masa sería atraída por m realizando el trabajo las fuerzas del campo.

7.12 Experimento de Cavendish. La medida de la constante G de la gravitación universal puede realizarse en el laboratorio y fue CAVENDISH quien lo hizo por primera vez, utilizando una balanza de torsión ideada por COULOMB. Esta balanza consiste actualmente en un hilo de torsión vertical del que pende una cruz en cuyos extremos

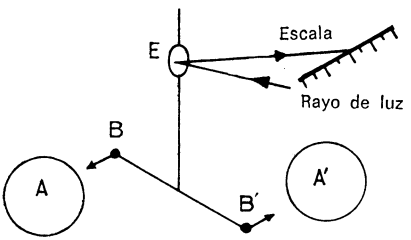


FIG. 7.4 Experimento de Cavendish.

se encuentran dos bolitas pesadas B y B' (fig. 7.4) que están atraídas por dos grandes bolas de plomo A y A', con lo que la cruz gira torciendo el hilo un ángulo que puede medirse por el ángulo girado por un espejito adosado al hilo y sobre el que incide un rayo de luz. El rayo reflejado girará un ángulo doble que el espejo, con lo que se duplica la sensibilidad, yendo a parar a una escala graduada.

La torsión del hilo permite medir el momento del par de fuerzas que se ejercen sobre B y B', de donde puede determinarse la fueza que A ejerce sobre B (primer miembro de la ec. 7.22). Las masas de A y B (m y m') se determinan con una balanza y el valor de r es la distancia de la bolita B al centro de A, en virtud de lo visto en el § 3.10. Podemos, pues, despejar el valor de G, que resulta valer

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$

que es la misma para todos los cuerpos.

7.13 Leyes de Kepler. Ya hemos mencionado que las leyes enunciadas por KEPLER para el movimiento de los planetas en el sistema solar constituyeron una guía eficaz para NEWTON en la formulación de su teoría de la Gravitación. Dichas leyes son tres:

1.ª Los planetas describen órbitas elípticas y el Sol ocupa uno de los focos de todas ellas.

2.ª Las áreas barridas por los radios vectores son proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

3.ª Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas respectivas.

La teoría de NEWTON de la Gravitación Universal interpreta perfectamente estas leyes. En el sistema solar, los planetas son atraídos por el Sol con fuerzas que obedecen a la ecuación 7.22, dirigidas hacia el centro del Sol. Es decir, cada planeta está sometido a una fuerza central y cumplirá la ley de las áreas (cfr. § 7.10), lo que concuerda con la segunda ley de Kepler. También se deducen las otras dos, pero la teoría de Newton va más lejos: al determinar la forma de las trayectorias resulta que éstas son cónicas: elipse, parábola o hipérbola, según que la energía mecánica del sistema sea, respectivamente, negativa, nula o positiva. Esto presupone tomar nula la energía potencial en el infinito. La teoría de Newton es más general que las leyes de Kepler por permitir interpretar las trayectorias de los cometas, las cuales pueden ser hiperbólicas.

Por otra parte, la teoría de la Gravitación permite interpretar el movimiento de satélites artificiales en torno a cualquier planeta, y de astronaves que surquen los espacios siderales en busca de órbitas que les lleven de un planeta a otro. Las órbitas en torno a un planeta cualquiera cumplirán las leyes de Kepler, que son consecuencia de la teoría de la Gravitación y, en este caso, el cuerpo que crea el campo gravitatorio a considerar es el planeta, en vez del Sol.

7.14 Movimiento planetario. Así pues, si queremos estudiar el movimiento de un planeta alrededor del Sol o de un satélite alrededor de un planeta, utilizaremos la ecuación 7.22 en la forma

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \qquad (7.22\ bis)$$

donde F es la fuerza que ejerce el cuerpo de masa M (Sol o planeta) sobre el de masa m (planeta o satélite, respectivamente). Evidentemente, también será la que ejerza la masa m sobre la M.

Consideremos, para fijar ideas, que se trata de la Tierra y un satélite artificial. La desproporción de las masas es tan grande que puede considerarse el caso en que el satélite describa una órbita circular centrada en el centro de la Tierra. Como ésta puede suponerse que tiene su masa distribuida con simetría en torno a su centro, nos hallaremos en las condiciones citadas en el § 3.10 y el campo gra-

vitatorio que crea en su exterior será igual al que crearía si toda su masa M estuviera concentrada en su centro. Llamando r al radio de la órbita del satélite, la ecuación 7.22 *bis* nos da la fuerza centrípeta que sobre él ejerce la Tierra, por lo que deberá cumplirse

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

de donde resulta

$$v^2 = \frac{G\,M}{r}$$

La celeridad v del satélite será igual a la longitud $2\,\pi\,r$ de su órbita dividida por el período de revolución T o tiempo que tarda en recorrerla, luego

$$\frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2} = \frac{G\,M}{r}$$

de donde

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G\,M}{4\,\pi^2} \tag{7.24}$$

Este segundo miembro sólo depende de la masa del cuerpo creador del campo gravitatorio (la Tierra en nuestro caso), por lo que cualquier satélite que gire siguiendo una órbita circular cualquiera tendrá fijada la razón del cubo del radio al cuadrado del período. Esto no es más que la tercera ley de Kepler aplicada al caso de órbitas circulares.

Ejemplo: Un satélite terrestre recorre una órbita circular de radio 6670 km, tardando 1 hora 30 minutos y 23 segundos en dar una vuelta completa. Determinar la masa de la Tierra.

Despejando M de la ecuación 7.24 y expresando todas las magnitudes en unidades SI tendremos

$$r = 6{,}67\cdot10^{6}\ \text{m} \qquad T = 5423\ \text{s} \qquad G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$$

y

$$M = \frac{4\,\pi^2\cdot6{,}67^3\cdot10^{18}}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5423^2} = 5{,}97\cdot10^{24}\ \text{kg}$$

7.15 Campo gravitatorio terrestre; masa pesante y masa inerte. Las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra sobre los diversos cuerpos pueden calcularse multiplicando la masa del cuerpo en cuestión por el campo gravitatorio creado por la Tierra, el cual (§ 7.11) será un campo central que deriva de un potencial (ec. 7.23)

$$V = -\frac{GM}{r} \tag{7.25}$$

donde M es la masa de la Tierra y r la distancia del cuerpo considerado al centro de la Tierra. El campo gravitatorio terrestre lo representaremos por $\mathbf{g}$ y su módulo es

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{7.26}$$

Haciendo $r = 6370$ km, valor aproximado del radio terrestre, tendremos el valor del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9{,}81 \text{ N/kg} \tag{7.27}$$

donde $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones 7.26 y 7.27 tenemos

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2} \tag{7.28}$$

Como vemos, a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra ($r = 2R$), el campo gravitatorio se reduce a la cuarta parte del valor que tiene en la superficie.

La fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo recibe el nombre de *peso* de éste. Puede comprobarse experimentalmente que el peso de un cuerpo depende del lugar en que se encuentre y que a una altura sobre la superficie de la Tierra de un radio terrestre, el peso de un cuerpo es la cuarta parte del peso que tiene en la superficie terrestre. Éste es un hecho experimental que presentamos independientemente de lo visto hasta ahora. Prosiguiendo nuestra experimentación, determinemos estáticamente (con un dinamómetro, por ejemplo) el peso de dos cuerpos A y B en distintos puntos del espacio P, P', P'', ..., y encontramos que su cociente es siempre el mismo

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{F'_A}{F'_B} = \frac{F''_A}{F''_B} = \ldots = \frac{m_A}{m_B}$$

en todos los puntos del espacio. El valor m_A/m_B de este cociente no dependerá, pues, del punto del espacio escogido y será característico de los cuerpos. Es decir, existirá una cierta propiedad inherente a los

cuerpos que nos determinará el cociente entre sus pesos en un punto cualquiera. Dicha propiedad recibe el nombre de *masa pesante* del cuerpo considerado y el número que la mida dependerá de la unidad de medida que se adopte para dicha masa pesante. Tomando un patrón de masa pesante, podríamos determinar las masas pesantes de los demás cuerpos por comparación de las fuerzas con que la Tierra atrae al cuerpo considerado y al patrón. Se trata, insistimos, de una medida estática.

Ahora bien, si colocamos los dos cuerpos en un mismo punto (cualquiera que sea éste) y los abandonamos, observaremos que caen con la misma aceleración y por la segunda ley de Newton resulta que el cociente de las fuerzas es igual al cociente de las masas *inertes* (§ 7.1), luego *el cociente entre las masas pesantes de dos cuerpos es igual al cociente entre sus masas inertes,* de donde resulta que la masa pesante es proporcional a la masa inerte.

Démonos cuenta de que se ha llegado a un resultado verdaderamente sorprendente. La masa pesante es una propiedad del cuerpo a la cual se debe la atracción gravitatoria; en cambio, la masa inerte es una medida de la resistencia del cuerpo a alterar su movimiento, y el que sean proporcionales dos propiedades de índole tan distinta es algo que la Física clásica no ha podido interpretar. Dice EINSTEIN que así como en la Física clásica este hecho es accidental, en la Física moderna constituye un hecho fundamental que conduce a una comprensión más profunda de la Naturaleza. Para él fue uno de los datos más importantes que le llevaron a formular la teoría de la Relatividad.

Como tenemos libertad absoluta para elegir la unidad de medida de la masa pesante, la relación de proporcionalidad entre masa pesante y masa inerte

$$m_p = K\, m_i$$

hace que si tomamos como unidad de masa pesante la misma de masa inerte, ambas masas vendrán medidas, para un mismo cuerpo, por el mismo número, y ello hace que no suela establecerse distinción entre ellas y se hable simplemente de «masa».

La fuerza con que la Tierra atrae a una masa de 1 kg situada al nivel del mar a 45° de latitud se le da el nombre de kilogramo-fuerza y se tiende modernamente a llamarle *kilopond* (kp) (del latín *pondus,* el peso). Esta unidad, junto con el metro y el segundo, fundamenta el llamado sistema *terrestre* o técnico. En él la unidad de masa aparece como unidad derivada, recibe el nombre de *unidad técnica de masa* y se define como la masa que al aplicarle una fuerza de 1 kp

adquiere una aceleración de 1 m/s². Equivale a 9,8 kg. En este sistema, la unidad de trabajo es el *kilopondmetro* (kpm) o kilográmetro, trabajo efectuado por una fuerza de 1 kp al desplazar su punto de aplicación 1 m en su propia dirección. La unidad de potencia sería, claro está, el kilopondmetro/segundo (kpm/s).

Este sistema, aun llevando el nombre de técnico, no es muy empleado por los técnicos, los cuales toman como unidad de potencia el kilowatt o el caballo de vapor (CV). Este último equivale a 75 kpm/s. También suele emplearse el *horse-power* (HP), equivalente a 76 kpm/s. Dado que en los trabajos técnicos siempre se admite una tolerancia de un 5 %, como la diferencia entre el CV y el HP es inferior a dicho valor, resulta indiferente utilizar una u otra unidad.

Por otra parte, los técnicos solían emplear un sistema de unidades no absoluto en el que se toman como unidades metro, segundo, kilopond y kilogramo. Ello hace que en la ecuación 7.2 deba hacerse $k = 1/9{,}8$ y no igual a la unidad. Los sistemas de unidades en que $k = 1/g_0$ reciben el nombre de *gravitatorios* y no se emplearán en este libro.

7.16 Trabajo y energía en un campo gravitatorio; velocidad de escape. Una partícula de masa m situada en un campo gravitatorio $\mathbf{g}$ se halla sometida a una fuerza $m\mathbf{g}$ producto de la masa m por el campo $\mathbf{g}$, que es conservativo por ser newtoniano (§ 3.7). Según se vio en el § 7.6, dicha fuerza es conservativa y el trabajo que efectúa al pasar la masa m de un punto A a otro cualquiera B del campo es $m(V_A - V_B)$, que en el caso actual, por venir dado el potencial por la ecuación 7.25, siendo M la masa creadora del campo (no tiene por qué ser precisamente la Tierra), toma la expresión

$$W = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{7.29}$$

Vemos que este trabajo no depende del camino seguido para ir de A a B, lo cual es característico (§ 3.3) de los campos conservativos.

También veíamos en el § 7.6 que al moverse la masa m en el campo, la energía mecánica se conserva. En el caso actual, la energía potencial es

$$m\,V = -\frac{G\,M\,m}{r}$$

en virtud de la ecuación 7.25, y sumándole la energía cinética, la conservación de la energía mecánica se expresa en la forma siguiente:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} = E = \text{constante} \tag{7.30}$$

o, si se quiere,

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G M m}{r_A} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{G M m}{r_B}$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $m/2$ queda

$$v_A^2 - v_B^2 = 2 G M \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \tag{7.31}$$

Podríamos aplicar la ecuación 7.31 al campo gravitatorio terrestre y considerar que A y B son dos puntos próximos a la superficie de la Tierra, con lo cual r_A y r_B diferirán muy poco del radio terrestre R. La diferencia $r_B - r_A = h$ es el desnivel existente entre los puntos A y B. Así pues, la ecuación 7.31 nos da

$$v_A^2 - v_B^2 = 2 G M \frac{h}{r_A r_B} \simeq 2 \frac{G M}{R^2} h$$

que en virtud de la ecuación 7.27 podemos escribir en la forma

$$v_A^2 - v_B^2 = 2 g_0 h$$

que es la conocida ley de las velocidades de caída de los cuerpos, entre puntos próximos a la superficie terrestre.

Volvamos al caso general de un campo gravitatorio que podemos imaginar creado por un cuerpo de simetría esférica y masa M y consideremos por separado los casos en que la E de la ecuación 7.30 sea nula, positiva o negativa.

Si $E = 0$, a cualquier valor finito de r corresponde una energía cinética positiva del cuerpo que se mueve en el campo gravitatorio, pues el minuendo del primer miembro de la ecuación 7.30 deberá ser siempre igual al sustraendo. Ello significa que el cuerpo de masa m podrá alejarse indefinidamente, efectuando un trabajo contra las fuerzas del campo a expensas de su energía cinética. En puntos muy alejados ($r \to \infty$) ésta será muy pequeña.

Si $E > 0$, la energía cinética no se anula nunca, pues para r tendiendo a infinito, tenderá al valor de E. Quiere esto decir que el cuerpo se comportará como en el caso anterior, con la diferencia de que en los puntos muy alejados llevará una velocidad apreciable.

Si $E < 0$, como al aumentar r disminuye la energía cinética, ésta se anulará para un valor límite r_{max}, pues a valores aún mayores de r

corresponderían valores negativos de la energía cinética, lo cual carece de sentido físico. Así pues, el punto no podrá alejarse demasiado del cuerpo creador del campo. Éste es el caso de los planetas en el sistema solar y de los satélites (cfr. § 7.13). En cambio, ciertos cometas describen trayectorias hiperbólicas y pueden alejarse indefinidamente, debido a que para ellos $E > 0$. En el caso en que $E = 0$ también podrían existir cometas que escaparan del sistema solar y sus trayectorias serían parabólicas.

Así pues, la condición que debe cumplir un cuerpo para poder escapar de la atracción gravitatoria de otro es que su energía en el campo gravitatorio de éste no sea negativa, es decir, que sea, como mínimo, nula. En este caso, la velocidad del cuerpo sólo se anularía en el infinito. Si queremos mandar un cuerpo al infinito desde un punto A de un campo gravitatorio, bastará comunicarle inicialmente una energía cinética igual al valor absoluto de la energía potencial en el punto A, con lo cual $E = 0$ en la ecuación 7.30. La velocidad inicial la podemos obtener de la ecuación 7.31 haciendo $r_B = \infty$ y $v_B = 0$ y a dicha velocidad se la llama *velocidad de escape* del campo gravitatorio. Es la mínima celeridad inicial que hay que comunicar a un cuerpo para que siempre le quede energía que gastar en trabajo contra las fuerzas del campo.

Así, si queremos lanzar una nave espacial desde la superficie terrestre habrá que comunicarle una celeridad no inferior a

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0R} \tag{7.32}$$

Esta expresión se ha obtenido haciendo $r_A = R$, radio terrestre, en la ecuación 7.31 y $r_B = \infty$, $v_B = 0$ y teniendo en cuenta luego la ecuación 7.27. Sustituyendo valores resulta, para la velocidad de escape de la Tierra, 11,2 km/s.

Sustituyendo en la ecuación 7.32 M y R por la masa y el radio del Sol, obtendríamos la velocidad de escape del Sol que resulta ser de unos 620 km/s. En cambio, la de la Luna es sólo de 2,4 km/s. Estos datos explican por qué no hay atmósfera lunar: las moléculas adquirirían fácilmente velocidades superiores a las de escape y la Luna no podría retener su atmósfera. En la Tierra eso ocurre con las moléculas más ligeras, cual son las de hidrógeno y helio, pero no con las demás. En cambio, el Sol contiene grandes cantidades de hidrógeno y helio en su cromosfera, pues, dado lo elevado de su velocidad de escape, ni siquiera las moléculas más ligeras pueden abandonarlo fácilmente.

8

Dinámica de los sistemas

En el capítulo 7 hemos estudiado la Dinámica del punto material, entendiendo por tal todo cuerpo cuyas dimensiones sean despreciables frente a las del sistema de referencia. Ahora vamos a estudiar el caso en que se trate de varios puntos materiales que no sean independientes entre sí, sino que se ejerzan acciones mutuas. Cuando éstas hagan que las distancias entre los diferentes puntos permanezcan invariables, el sistema se dirá que es rígido.

8.1 Centro de masa. El estudio de la Dinámica de un sistema de puntos puede llegar a ser muy complicado, pero, según veremos, siempre existe un punto único llamado *centro de masa* que se mueve como si en él estuviera concentrada toda la masa del sistema y a él se aplicaran todas las fuerzas que se ejercen sobre el sistema desde el exterior. Su movimiento, pues, podrá estudiarse con los métodos de la Dinámica del punto material.

Si consideramos un sistema de puntos materiales P_1, P_2, ..., P_N de masas respectivas m_1, m_2, ..., m_N, situados todos en una región no muy extensa del campo gravitatorio terrestre, cada uno de ellos tiene un peso igual al producto de su masa por el vector **g** intensidad del campo gravitatorio. Como la región considerada no es muy extensa, el vector **g** tendrá en todos los puntos la misma dirección, sentido y módulo y sobre el sistema de puntos se ejerce un sistema de fuerzas paralelas. Dicho sistema equivale (cfr. § 2.9) a una fuerza única vertical y hacia abajo, de módulo suma de los módulos de todas ellas y que pase por un punto G definido por la ecuación 2.11 al que llamaremos *centro de gravedad* del sistema y puede considerarse que por él pasa el peso total.

Si en todos los puntos del sistema no existe la misma intensidad del campo gravitatorio, los pesos pudieran no constituir un sistema

de fuerzas paralelas y en tal caso no existiría el centro de gravedad, pero el punto G determinado por la ecuación 2.11 independientemente de $\mathbf{g}$, existe y recibe el nombre de *centro de masa* (cdm) del sistema.

De lo anterior se comprende que, en muchísimos casos, podrá hablarse indistintamente de centro de gravedad o de cdm de un sistema. Sus coordenadas vienen determinadas por las ecuaciones 2.12.

Aun cuando la estructura de la materia es esencialmente discontinua, las separaciones entre los puntos materiales que constituyen los sólidos son tan pequeñas que el error que podamos cometer en la determinación de los cdm al suponer una distribución continua de la masa es totalmente despreciable frente a los errores de medida.

Con esta aproximación consistente en suponer continua la materia, podemos aplicar los métodos del Análisis infinitesimal para la determinación de los cdm. Así, consideremos descompuesto un cuerpo en elementos de volumen dV asimilables a puntos materiales. Su masa será $dm = \rho\, dV$, siendo ρ la densidad del material en tal elemento de volumen. Esta densidad podrá variar de unos puntos a otros, es decir, en general, será función de x, y, z. Como la masa de dV es dm, la masa total del cuerpo será la suma de las masas elementales, o sea

$$m = \int dm$$

estando extendida la integral a todo el cuerpo.

El sumatorio de la ecuación 2.11 se convertirá en la integral

$$\int (P - O)\, dm$$

extendida a todo el cuerpo, donde P es un punto genérico en el que se considera situada la masa dm.

Así pues, la ecuación 2.11, para el caso en que se pueda considerar distribución continua de la materia, se convierte en

$$m\,(G - O) = \int (P - O)\, dm \tag{8.1}$$

y las ecuacione 2.12 darán, en consecuencia,

$$m\,\bar{x} = \int x\, dm \qquad m\,\bar{y} = \int y\, dm \qquad m\,\bar{z} = \int z\, dm \tag{8.2}$$

La masa puede estar distribuida con continuidad en un volumen, pero también podría estarlo sobre una superficie o sobre una línea. En estos casos, las integrales de las ecuaciones 8.1 y 8.2 serían integrales de superficie o curvilíneas, según sea la distribución.

Cuando se trata de una distribución superficial, la masa dm del elemento de superficie dS puede escribirse en la forma $dm = \sigma\, dS$, donde σ es la *den-*

sidad superficial (masa por unidad de superficie), la cual puede variar de unos puntos a otros.

Si la masa está distribuida sobre una línea, entonces suele introducirse el concepto de densidad lineal λ (masa por unidad de longitud), y un elemento de longitud dl tendrá una masa $dm = \lambda\, dl$.

Si designamos por μ la densidad (cúbica, superficial o lineal), la ecuación 8.1 puede escribirse en la forma

$$(G - O) \int \mu\, d\tau = \int (P - O)\, \mu\, d\tau$$

donde $d\tau$ representa el elemento de volumen, superficie o longitud, según sea el caso.

Ejemplos: 1.º Hallar el cdm de un alambre homogéneo cuya forma es un arco de circunferencia de radio r y cuyo ángulo central es 2α.

Como los puntos P están todos en un mismo plano con el centro O de la circunferencia, el segundo miembro de la ecuación 8.1 es una suma de vectores coplanarios y por tanto G deberá estar en el mismo plano. Tomando éste como plano x-y, ya tenemos $\bar{z} = 0$. El origen de coordenadas lo tomaremos en el centro de la circunferencia y el eje Ox será el de simetría del arco (fig. 8.1).

Descompongamos el alambre en elementos de longitud $dl = r\, d\theta$ que son asimilables a puntos materiales de masa

$$dm = \lambda\, r\, d\theta$$

En la figura 8.1 vemos que las coordenadas de un punto genérico P son

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo x y dm en la primera de las ecuaciones 8.2 tenemos

$$m\bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)\,(\lambda\, r\, d\theta) = \lambda\, r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = \lambda\, r^2\, 2 \operatorname{sen}\alpha$$

y dividiendo miembro a miembro esta ecuación por la

$$m = \lambda\,(r\, 2\alpha)$$

queda

$$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \tag{8.3}$$

La segunda de las ecuaciones 8.2 es una suma en la cual podemos asociar, dos a dos, términos de igual valor absoluto pero de signos opuestos a causa de la simetría, con lo que tendríamos $\bar{y} = 0$. Luego el cdm está situado sobre el eje de simetría y a una distancia de O dada por la ecuación 8.3.

2.º Hallar el cdm de una placa homogénea en forma de triángulo rectángulo de catetos b y c.

Tomemos como plano x-y el de la placa y tomemos como ejes de coordenadas los determinados por los catetos (fig. 8.2). Descompongamos el triángulo en franjas verticales de espesor infinitesimal dx, con lo que los elementos de superficie *asimilables a puntos* de una misma franja tendrán todos la misma

abscisa x. En la suma del segundo miembro de la primera de las ecuaciones 8.2 asociaremos los términos correspondientes a una misma franja y su contribución a la suma será $\sigma y\, dx$, con lo que la primera de las ecuaciones 8.2 quedará en la forma

$$m\,\bar{x} = \int_0^{x=b} x\,\sigma\,y\,dx \tag{8.4}$$

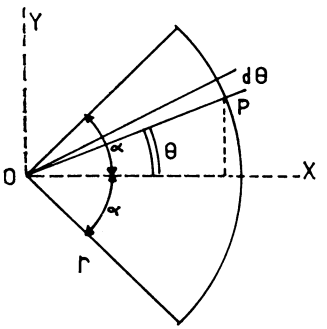


FIG. 8.1

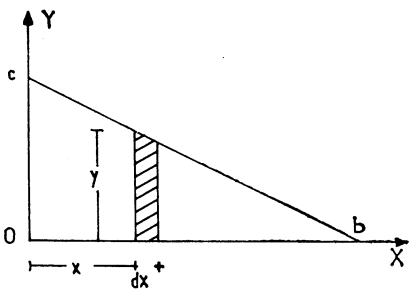


FIG. 8.2

Ahora bien, de la figura 8.2 deducimos

$$\frac{y}{c} = \frac{b-x}{b}$$

que sustituida en la ecuación 8.4 da

$$m\,\bar{x} = \int_0^b x\,\sigma\,\frac{c}{b}\,(b-x)\,dx = \sigma\,\frac{c}{b}\int_0^b x\,(b-x)\,dx =$$

$$= \sigma\,\frac{c}{b}\left[\int_0^b b\,x\,dx - \int_0^b x^2\,dx\right] = \sigma\,\frac{c}{b}\left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right] = \frac{1}{6}\,\sigma\,c\,b^2$$

y dividiendo por

$$m = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sigma$$

queda

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\,b \tag{8.5}$$

La segunda de las ecuaciones 8.2 podría tratarse en forma análoga, descomponiendo el triángulo en franjas horizontales, y quedaría

$$\bar{y} = \frac{1}{3}\,c \tag{8.6}$$

Por último, como en todos los puntos del triángulo es $z = 0$, queda

$$\bar{z} = 0 \tag{8.7}$$

Vemos que el cdm coincide con el baricentro geométrico del triángulo.

3.º El cdm de un disco homogéneo delgado coincide con su centro geométrico. En efecto: consideremos los pesos de los distintos puntos materiales que constituyen el disco. La homogeneidad de éste y su simetría obligan a que el centro de gravedad sea su centro geométrico.

4.º Determinar el cdm de un cono de revolución macizo y homogéneo.

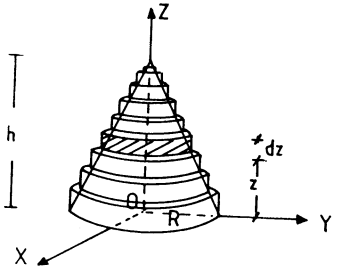


FIG. 8.3

Consideremos el cono (fig. 8.3) descompuesto en discos de espesor dz normales al eje de revolución Oz. A todos los puntos de un mismo disco corresponde el mismo valor de z y asociando en la suma de la tercera de las ecuaciones 8.2 los términos correspondientes a un mismo disco, dicha suma se convierte en suma de productos de la masa de cada disco por la z correspondiente a él.

La masa del disco situado a una altura z sobre la base del cono es

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

siendo r el radio del disco. Pero por la semejanza observada en la figura 8.3

$$\frac{r}{R} = \frac{h - z}{h} \qquad \text{y entonces} \qquad dm = \rho \pi R^2 \frac{(h-z)^2}{h^2} dz$$

La tercera de las ecuaciones 8.2 nos queda en la forma

$$m\bar{z} = \int_0^h \rho \frac{\pi R^2}{h^2} (h-z)^2 z \, dz = \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3) \, dz =$$

$$= \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \left[\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right] = \rho \frac{\pi R^2 h^2}{12}$$

y dividiendo esta igualdad por la que da la masa del cono,

$$m = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

queda

$$\bar{z} = \frac{h}{4}$$

Es obvio que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, por lo que el cdm de un cono de revolución macizo y homogéneo se halla situado sobre el centro de la base a una distancia igual a un cuarto de la altura.

8.2 Cantidad de movimiento y momento cinético de un sistema. Dado un sistema de puntos materiales P_1, P_2, ..., P_N en movimiento, de masas respectivas m_1, m_2, ..., m_N, a cada punto P_i irá asociado un vector cantidad de movimiento $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, con lo que tendremos definido un sistema de vectores cantidad de movimiento cuya resultante general

$$\mathbf{p} = \Sigma\, m_i \mathbf{v}_i \tag{8.8}$$

recibe el nombre de *cantidad de movimiento del sistema* y cuyo momento resultante respecto a un punto fijo O recibe el nombre de *momento cinético del sistema* respecto al punto O. Su proyección sobre un eje que pase por O sería el momento cinético respecto a dicho eje, del sistema de puntos materiales. Llamando $\mathbf{L}$ al momento cinético del sistema tendremos

$$\mathbf{L} = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i \tag{8.9}$$

Sobre cada punto P_i del sistema se ejercen dos tipos de fuerzas: las *interiores* que ejercen sobre P_i los demás puntos del sistema y cuya resultante representaremos por $\mathbf{f}_i$, y las *exteriores*, cuya resultante representaremos por $\mathbf{F}_i$. El teorema de la cantidad de movimiento (§ 7.8) nos da para cada punto P_i

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i)\, dt = d(m_i \mathbf{v}_i) \tag{8.10}$$

Sumando las N ecuaciones 8.10 correspondientes a los N puntos del sistema nos encontramos con que, por ser las fuerzas interiores opuestas dos a dos, queda $\Sigma\, \mathbf{f}_i = 0$ y por tanto

$$\Sigma\, \mathbf{F}_i\, dt = d\Sigma\, m_i \mathbf{v}_i = d\mathbf{p} \tag{8.11}$$

y llamando $\mathbf{F} = \Sigma\, \mathbf{F}_i$ a la resultante general del sistema de fuerzas *exteriores*, la ecuación 8.11 da

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{8.12}$$

Es decir: *la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante general del sistema de fuerzas exteriores.*

Derivando respecto al tiempo la ecuación 8.9 tenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma\,(P_i - O) \wedge \frac{d(m_i\,\mathbf{v}_i)}{dt} + \Sigma\,\mathbf{v}_i \wedge (m_i\,\mathbf{v}_i)$$

siendo nulo el último término por serlo el producto vectorial de dos vectores paralelos. Teniendo en cuenta la ecuación 7.15, la anterior ecuación queda en la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma\,(P_i - O) \wedge (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \tag{8.13}$$

Este segundo miembro es la suma de los momentos resultantes respecto a O del sistema de fuerzas exteriores y del sistema de fuerzas interiores, pero como éstas son opuestas dos a dos, también lo serán sus momentos respecto a O y el momento resultante del sistema de fuerzas interiores es nulo y la ecuación 8.13 queda en la forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Sigma\,(P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{M} \tag{8.14}$$

siendo $\mathbf{M}$ el momento resultante, respecto a O, del sistema de fuerzas exteriores. Así pues, *la derivada temporal del momento cinético de un sistema respecto a un punto es igual al momento resultante, respecto a dicho punto, del sistema de fuerzas exteriores.*

En la ecuación 8.12 observamos que si la resultante general del sistema de fuerzas exteriores es nula, *la cantidad de movimiento del sistema permanece constante.* Así, por ejemplo, al disparar un arma de fuego, las únicas fuerzas exteriores al arma son su peso y la fuerza que la sustenta, las cuales dan resultante nula. Luego la cantidad de movimiento del sistema debe conservarse durante el disparo, y como era nula antes, deberá serlo después. Esto hace que la cantidad de movimiento de la bala sea un vector opuesto a la cantidad de movimiento que toma el arma (retroceso de las armas de fuego).

Un cohete en vuelo horizontal tiene también compensado su peso por una fuerza sustentadora y la resultante de las fuerzas exteriores es nula. Se conservará la cantidad de movimiento *del sistema*, es decir, si en un instante tiene una masa m y lleva una velocidad v respecto al suelo y expulsa entonces por su cola una masa m' con velocidad u hacia atrás relativa al cohete, o sea que m' se moverá hacia adelante con velocidad $v - u$ respecto al suelo, la cantidad de movimiento $m\,v$ antes de la expulsión ha de ser igual a la cantidad de movimiento del sistema

$$(m - m')\,(v + \Delta v) + m'\,(v - u)$$

después de la expulsión, pues en ésta no intervienen fuerzas exteriores. Igualando y despejando Δv tenemos

$$\Delta v = \frac{m' u}{m - m'}$$

Este incremento de la celeridad es positivo si lo es u, es decir, si la masa m' sale del cohete. Luego vemos que la expulsión del chorro incrementa la velocidad si se expulsa hacia atrás respecto al cohete. Si se expulsara hacia adelante, u sería negativa, así como Δv y el cohete disminuiría su celeridad (cohetes de freno).

Análogamente, la ecuación 8.14 nos enseña que si el momento resultante respecto a un punto de las fuerzas *exteriores* a un sistema es nulo, éste *conserva su momento cinético* respecto al punto.

8.3 Movimiento del cdm. Dado un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \ldots, P_N$, de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, cuya masa $m = \Sigma m_i$ sea constante, sabemos que su cdm es un punto G definido por la ecuación 2.11. Derivando ésta respecto a t y recordando que la derivada de un vector de posición respecto al tiempo es la velocidad del punto que determina, queda

$$\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_G \tag{8.15}$$

y como el primer miembro es la cantidad de movimiento del sistema y m es su masa total, se deduce que *la cantidad de movimiento del sistema es igual a la que tendría su cdm si se supone concentrada en él toda la masa.*

Si volvemos a derivar respecto al tiempo la ecuación 8.15 queda

$$\Sigma m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_G \tag{8.16}$$

donde $m_i \mathbf{a}_i$ es la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre la masa m_i de P_i. Estas fuerzas serán unas exteriores y otras interiores, por lo que el primer miembro de la ecuación 8.16 será la suma vectorial de las fuerzas exteriores e interiores, pero como éstas son opuestas dos a dos, su suma será nula y la ecuación 8.16 puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_G \tag{8.17}$$

donde $\mathbf{F}$ es la resultante general de las fuerzas *exteriores*. Así, la ecuación 8.17 nos indica que *el movimiento del cdm es igual al de un punto de masa igual a la total del sistema, al cual se trasladaran paralelamente todas las fuerzas exteriores.*

Todo esto hace que si tomáramos un sistema de ejes paralelos a los de referencia y que tuvieran como origen de coordenadas el cdm G, la cantidad de movimiento del sistema en el movimiento *relativo* a estos ejes sería nula, pues en el movimiento relativo es nula la velocidad de G. El momento cinético respecto a G sería el correspondiente a una rotación del sistema alrededor de G y el momento cinético respecto al origen de coordenadas O del sistema inercial de referencia sería, por la definición de momento cinético del sistema y en virtud de la ecuación 2.6,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_G + (G - O) \wedge \mathbf{p} \tag{8.18}$$

donde $\mathbf{L}_G$ es el momento cinético de rotación respecto al cdm y $\mathbf{L}$ el momento cinético respecto a O. La ecuación 8.18 nos dice que *el momento cinético respecto a un punto fijo O cualquiera es la suma del momento cinético respecto a O del cdm considerado como punto material de masa igual a la total del sistema, más el momento cinético del sistema en rotación alrededor de su cdm.* Esto hace que el estudio del movimiento de un sistema cualquiera pueda descomponerse en dos problemas: movimiento de su cdm (problema de Dinámica del punto) y movimiento del sistema alrededor de su cdm.

8.4 Teorema de las fuerzas vivas. Llamaremos *energía cinética de un sistema* de puntos materiales a la suma de las energías cinéticas de los distintos puntos que constituyen el sistema. Cada uno de estos puntos se halla sometido a fuerzas exteriores e interiores al sistema y el trabajo de todas ellas en un desplazamiento del punto es igual al incremento de su energía cinética (§ 7.5); por tanto, si sumamos las variaciones de energía cinética de todos los puntos del sistema durante un intervalo de tiempo dado, tendremos que *el incremento de energía cinética de un sistema en un intervalo de tiempo cualquiera es igual al trabajo que durante ese tiempo efectúan todas las fuerzas que se ejercen en el sistema.* Es de notar que en este caso no se anulan, en general, los trabajos de las fuerzas interiores, pues, aunque son opuestas dos a dos, los desplazamientos de sus puntos de aplicación no tienen por qué dar trabajos opuestos. Habrá, pues, que tener en cuenta tanto las fuerzas exteriores como las interiores.

8.5 Rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo. Cuando el sistema de puntos constituye un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo, ya sabemos (§ 5.2) que las trayectorias de los puntos son circulares, centradas en el eje y contenidas en planos normales a él.

Consideremos, pues, una sección del cuerpo normal al eje, en la cual se encuentra un punto genérico P_i (fig. 8.4). Sea $\mathbf{F}_i$ la proyección sobre este plano de la resultante de las fuerzas aplicadas al punto P_i. La componente normal a la sección no la consideraremos, pues sería paralela al eje y quedaría contrarrestada por otras fuerzas,

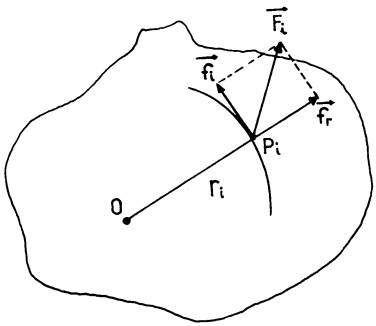


FIG. 8.4 Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo.

ya que sabemos que el punto P_i no toma aceleración paralela al eje, dado que no sale de la sección considerada. El eje es normal a O en la sección.

La fuerza $\mathbf{F}_i$ tiene un momento respecto al eje

$$M_i = f_i r_i \tag{8.19}$$

donde f_i es la componente *tangencial* de $\mathbf{F}_i$ y r_i es el radio de la trayectoria circular de P_i. Así pues, f_i será igual al producto de la masa m_i por su aceleración *tangencial*, es decir, en virtud de la ecuación 4.20 tenemos

$$f_i = m_i a_{ti} = m_i r_i \alpha \tag{8.20}$$

siendo la aceleración angular α común a todos los puntos del cuerpo en rotación. Sustituyendo la ecuación 8.20 en la 8.19, tenemos

$$M_i = m_i r_i^2 \alpha$$

y sumando los momentos respecto al eje de las fuerzas que se ejercen sobre todos los puntos, queda

$$M = \Sigma M_i = \Sigma m_i r_i^2 \alpha \tag{8.21}$$

Como las fuerzas interiores son opuestas dos a dos, su contribución al momento resultante respecto al eje es nula y M será el mo-

mento, respecto al eje de rotación, de las fuerzas *exteriores*. En el segundo miembro de la ecuación 8.21 podemos sacar α factor común y llamando a la suma

$$I = \Sigma\, m_i\, r_i^2 \tag{8.22}$$

momento de inercia (mdi) del cuerpo respecto a su eje de rotación, la ecuación 8.21 queda en la forma

$$M = I\,\alpha \tag{8.23}$$

que es la ecuación fundamental de la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo.

8.6 Momento de inercia. El mdi de un sistema respecto a un eje es una magnitud definida por la ecuación 8.22 que no depende para nada de que el sistema esté o no en rotación alrededor de dicho eje. En realidad, sólo depende de cómo está repartida la masa respecto al eje. Podríamos considerar concentrada toda la masa $m = \Sigma\, m_i$ del sistema en un punto situado a una distancia d del eje tal que se cumpliera

$$I = m\,d^2$$

donde I es el mdi del sistema verdadero respecto a dicho eje. Entonces a la distancia d así definida se le da el nombre de *radio de giro* del sistema respecto al eje considerado. Así pues, un sistema cuya masa total sea igual a m y cuyo mdi respecto a un eje dado sea I tiene, respecto a dicho eje, un radio de giro

$$d = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

En el caso en que podamos considerar que la materia está distribuida con continuidad, podemos hacer las mismas aproximaciones que hacíamos para la determinación del cdm, descomponiendo el cuerpo en elementos de masa asimilables a puntos materiales. De esta manera, si es r la distancia al eje de un punto genérico P que tiene asociada una masa m, la expresión del mdi se convierte en

$$I = \int r^2\, dm \tag{8.24}$$

estando extendida la suma a todos los elementos en que puede descomponerse el sistema.

Ejemplos: 1.º Calcular el mdi de una varilla recta homogénea de masa m y longitud l, respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por uno de sus extremos.

Tomemos el eje como eje de coordenadas Oy y el eje Ox tomémoslo en la dirección de la varilla. Descomponiendo ésta en elementos de longitud dx, como las dimensiones transversales son muy pequeñas, cada elemento de longitud podrá asimilarse a un punto material. Llamando $\lambda = m/l$ a la densidad lineal, un elemento genérico situado a distancia x del eje tendrá una masa $dm = \lambda\, dx$ y la ecuación 8.24 podrá escribirse en la forma

$$I = \int_0^l x^2 \lambda\, dx = \lambda \int_0^l x^2\, dx = \lambda \frac{l^3}{3}$$

y dividiendo esta ecuación por la $m = \lambda\, l$ tenemos

$$\frac{I}{m} = \frac{1}{3} l^2 \qquad \text{o sea} \qquad I = \frac{1}{3} m\, l^2$$

El radio de giro respecto al eje considerado sería

$$d = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m\, l^2}{m}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

2.° Calcular el mdi de una placa triangular homogénea, respecto al eje que contiene a su base.

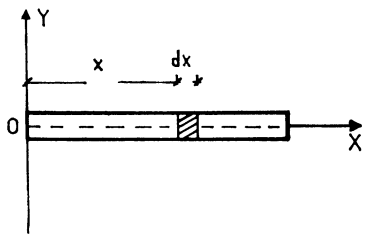


FIG. 8.5

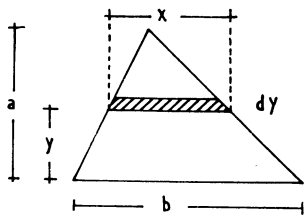


FIG. 8.6

Descompongamos el triángulo en franjas de espesor dy paralelas a la base b. Todos los elementos asimilables a puntos que constituyen la franja se hallan a una misma distancia y del eje, por lo que al sumar sus contribuciones al mdi dan

$$y^2\, dm \tag{8.25}$$

donde

$$dm = \sigma\, dS = \sigma\, x\, dy$$

siendo σ la densidad superficial.

Por la geometría de la figura 8.6 vemos que

$$\frac{x}{b} = \frac{a - y}{a}$$

donde a es la altura y b la base. La contribución (ec. 8.25) de la franja al mdi será, pues,

$$\sigma \frac{b}{a} y^2 (a - y)\, dy$$

y sumando las contribuciones de todas las franjas en que podamos descomponer el triángulo

$$I = \sigma \frac{b}{a} \int_0^a y^2 (a - y)\, dy = \sigma \frac{b}{a} \int_0^a (a y^2 - y^3)\, dy = \sigma \frac{b}{a} \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{1}{12} \sigma b a^3$$

y dividiendo esta igualdad por la

$$m = \sigma \frac{1}{2} b a$$

queda

$$\frac{I}{m} = \frac{1}{6} a^2 \qquad \text{o sea} \qquad I = \frac{1}{6} m a^2$$

El mdi de la placa triangular respecto a su base es un sexto del producto de su masa por el cuadrado de su altura, cualquiera que sea la forma del triángulo.

3.º Calcular el mdi de un cilindro de revolución homogéneo respecto a su eje.

Sea un cilindro homogéneo de altura h y radio a. Consideremos una capa cilíndrica de radio $r < a$ y espesor dr (fig. 8.7). Todos sus puntos tendrán igual

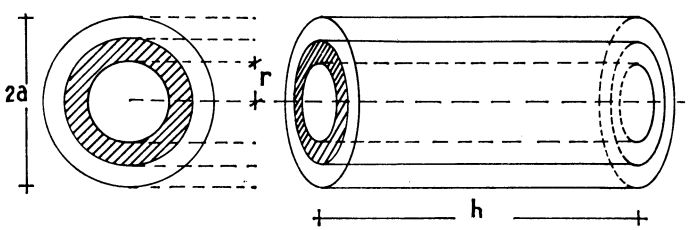


FIG. 8.7

contribución al mdi, por lo que la contribución de dicha capa al mdi del cilindro será

$$dI = r^2\, dm = r^2\, 2\pi r\, dr\, h \rho$$

donde ρ es la densidad del material.

Suponiendo el cilindro descompuesto en capas coaxiales, el mdi del cilindro respecto a su eje será la suma de sus contribuciones, es decir,

$$I = \int_0^a 2\pi h \rho r^3\, dr = 2\pi h \rho \frac{a^4}{4}$$

y dividiendo esta igualdad por la

$$m = \rho \pi a^2 h$$

queda

$$\frac{I}{m} = \frac{1}{2} a^2 \qquad \text{es decir} \qquad I = \frac{1}{2} m a^2$$

8.7 Teorema de Steiner. Consideremos una sección genérica de un cuerpo rígido, normal a un eje E que pase por O. El eje paralelo al considerado y que pase por el cdm del cuerpo corta a dicha sección en un punto G (fig. 8.8) que tomaremos como origen de un sistema de coordenadas cuyo eje x es el determinado por OG, eje y el perpendicular contenido en la sección y eje z normal a ésta. Un punto P_i dista r_i del eje E y r'_i del eje paralelo que pasa por el cdm. De la figura 8.8 deducimos, siendo d la distancia entre los ejes paralelos:

$$r_i^2 = (d + x_i)^2 + y_i^2 = d^2 + 2\,d\,x_i + x_i^2 + y_i^2 = d^2 + 2\,d\,x_i + r_i'^2$$

Multiplicando ambos miembros por la masa m_i del punto P_i tenemos

$$m_i\,r_i^2 = m_i\,d^2 + 2\,d\,m_i\,x_i + m_i\,r_i'^2$$

y sumando esta cantidad para todos los puntos del sistema

$$I = d^2 \Sigma\, m_i + 2\,d \Sigma\, m_i\,x_i + I_G \qquad (8.26)$$

donde I es el mdi respecto al eje E, e I_G el mdi respecto al eje paralelo al E que pasa por el cdm.

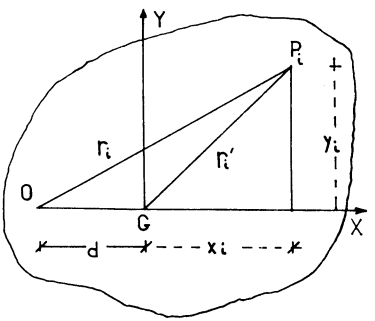


FIG. 8.8 Teorema de Steiner.

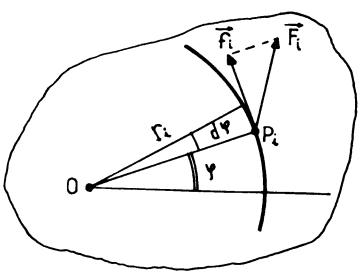


FIG. 8.9 Trabajo en el movimiento de rotación.

En el segundo miembro aparece $\Sigma\, m_i\,x_i$, que, según la primera de las ecuaciones 2.12, es igual al producto de la masa del sistema por la coordenada $\bar{x}$ del cdm, y como éste se ha tomado como origen, $\bar{x} = 0$ y por tanto

$$\Sigma\, m_i\,x_i = 0$$

Luego la ecuación 8.26 queda en la forma

$$I = I_G + m\,d^2 \tag{8.27}$$

que nos dice que *el mdi de un sistema respecto a un eje E es igual al mdi de dicho sistema respecto a un eje paralelo al E y que pase por el cdm más el producto de la masa del sistema por el cuadrado de la distancia del cdm al eje E* (teorema de Steiner).

8.8 **Trabajo y energía en el movimiento de rotación.** Consideremos de nuevo una sección de un cuerpo rígido normal al eje de rotación que lo corta en O y consideremos en ella un punto genérico P_i de masa m_i, al cual está aplicada una fuerza $\mathbf{F}_i$ cuya componente según la tangente a la trayectoria de P sea $\mathbf{f}_i$ (fig. 8.9). En un giro elemental $d\varphi$, P_i sufre un desplazamiento

$$ds_i = r_i\,d\varphi$$

y el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}_i$ será

$$f_i\,r_i\,d\varphi$$

El trabajo efectuado por todas las fuerzas aplicadas al sistema durante la rotación elemental $d\varphi$ será, pues,

$$d\varphi\,\Sigma f_i\,r_i$$

Ahora bien, $\Sigma f_i\,r_i$ es el momento resultante M, respecto al eje, de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido, por lo que el trabajo correspondiente a esta rotación elemental es

$$dW = M\,d\varphi \tag{8.28}$$

Si el cuerpo sufre una rotación finita, es decir, si el semiplano solidario al cuerpo (§ 5.2) pasa de una posición caracterizada por un ángulo diedro φ_0 con el semiplano de referencia a la caracterizada por un ángulo diedro φ_1, podemos considerar descompuesta esta rotación en una sucesión de rotaciones elementales y el trabajo efectuado será la suma de los trabajos elementales, es decir,

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M\,d\varphi \tag{8.29}$$

Pero si es ω la velocidad angular, $d\varphi = \omega\,dt$, y sustituyendo este valor en la ecuación 8.28

$$dW = M\,\omega\,dt \tag{8.30}$$

sustituyendo aquí M por su valor deducido de la ecuación 8.23 y teniendo en cuenta que $\alpha = d\omega/dt$, tenemos

$$dW = I\frac{d\omega}{dt}\omega\,dt = I\,\omega\,d\omega = d\left(\frac{1}{2}I\,\omega^2\right) \tag{8.31}$$

Es decir, el trabajo entregado al sistema se invierte en incrementar la función $\frac{1}{2}I\,\omega^2$ que deberá ser, por tanto, una energía. Sustituyendo la ecuación 8.31 en la 8.29 queda

$$W = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\left(\frac{1}{2}I\,\omega^2\right) = \frac{1}{2}I\,\omega_1^2 - \frac{1}{2}I\,\omega_0^2 \tag{8.32}$$

Esta expresión $\frac{1}{2}I\,\omega^2$ representa, en efecto, la energía cinética del cuerpo en rotación. Para verlo, sumemos las energías cinéticas de todos los puntos del cuerpo, con lo que tendremos la energía cinética total. El punto P_i tendrá una energía cinética

$$\tfrac{1}{2}m_i v_i \qquad \text{y como} \qquad v_i = r_i\,\omega$$

será

$$\Sigma\,\tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2\,\Sigma\,m_i r_i^2 = \tfrac{1}{2}I\,\omega^2$$

como queríamos demostrar.

8.9 Energía cinética de un sólido libre. Vimos en el § 5.4 que, en cada instante, el movimiento de un cuerpo rígido puede considerarse como la superposición de una rotación ω alrededor del eje instantáneo E y una traslación $\mathbf{v}_0$ paralela a él, cumpliendo la velocidad $\mathbf{v}_i$ de un punto genérico P_i la ecuación

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + (O - P_i) \wedge \boldsymbol{\omega} \tag{8.33}$$

y en el caso particular del cdm G

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_0 + (O - G) \wedge \boldsymbol{\omega} \tag{8.34}$$

siendo O un punto del eje instantáneo.

Los dos sumandos de los segundos miembros de las ecuaciones 8.33 y 8.34 son vectores perpendiculares, por lo que se cumplirá

$$v_i^2 = v_0^2 + (r_i\,\omega)^2 \qquad \text{y} \qquad v_G^2 = v_0^2 + (\bar{r}\,\omega)^2 \tag{8.35}$$

donde r_i y r son las distancias a E (fig. 8.10) de los puntos P_i y G, respectivamente.

Multiplicando por $m_i/2$ la primera de las ecuaciones 8.35 y sumando para todos los puntos del cuerpo

$$\Sigma\,(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2) = \Sigma\,(\tfrac{1}{2}m_i v_0^2) + \Sigma\,\tfrac{1}{2}m_i r_i^2\,\omega^2$$

El primer miembro es la energía cinética del cuerpo, y sacando $v_0^2/2$ factor común del primer sumatorio del segundo miembro y $\omega^2/2$ del otro, queda

$$\text{energía cinética} = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

y aplicando el teorema de Steiner $I = I_G + m\bar{r}^2$

energía cinética =

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{\omega^2}{2} (I_G + m\bar{r}^2), = \frac{1}{2} m (v_0^2 + \bar{r}^2 \omega^2) + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

que en virtud de la segunda de las ecuaciones 8.35 puede escribirse en la forma

$$\text{energía cinética} = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$

es decir, será la suma de la energía cinética de traslación, que es la que tendría el cdm en su movimiento supuesta concentrada en él toda la masa del cuerpo, más la energía cinética de rotación alrededor de un eje que pase por el cdm y sea paralelo al eje instantáneo de rotación y deslizamiento.

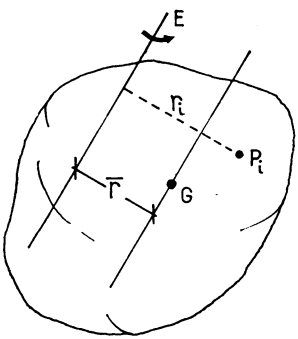


FIG. 8.10 El eje instantáneo de rotación y deslizamiento es *E*. El cdm del cuerpo es *G*.

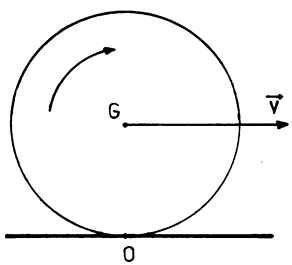


FIG. 8.11

Ejemplo: Consideremos el caso de una rueda que gire sin deslizar sobre un carril. La rueda avanzará y su centro *G* (fig. 8.11) llevará una celeridad v mientras *O* es el centro instantáneo de rotación. Por tanto, el eje instantáneo es normal en *O* al plano de la rueda. Ésta podemos considerarla como un cilindro homogéneo, por lo que su mdi respecto a un eje paralelo al instantáneo que pase por *G* será (cfr. § 8.6)

$$I_G = \frac{1}{2} m a^2$$

siendo a el radio de la rueda. Su energía cinética de rotación será, pues,

$$\frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{4} m a^2 \omega^2$$

que es $\frac{1}{4} m v^2$, pues $a \omega = v$. La energía cinética de traslación será $\frac{1}{2} m v^2$, y la energía cinética total

$$\frac{1}{4} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

Esto podría haberse obtenido directamente considerando la rotación instantánea respecto a O. Como en este caso no hay traslación, la energía cinética sería $\frac{1}{2} I_O \omega^2$, pero, en virtud del teorema de Steiner,

$$I_O = I_G + m a^2 = \frac{1}{2} m a^2 + m a^2 = \frac{3}{2} m a^2$$

y entonces

$$\frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{3}{4} m a^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

8.10 Momento cinético de un cuerpo rígido respecto al eje de rotación. Como en el movimiento de rotación los puntos describen trayectorias circulares situadas en planos normales al eje y centradas en él, el momento cinético de un punto P_i respecto al eje será

$$r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega \qquad \text{pues} \qquad v_i = r_i \omega$$

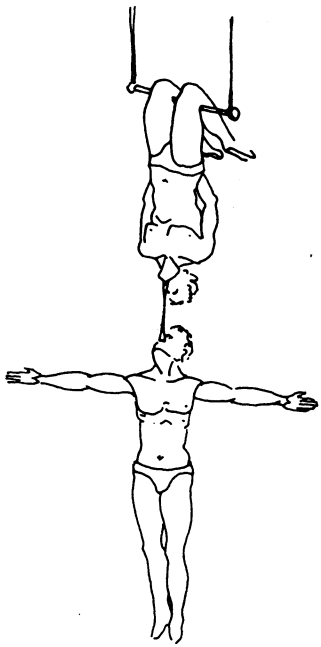
donde m_i es la masa de P_i y r_i el radio de su trayectoria. Sumando los momentos cinéticos respecto al eje se tendrá el momento cinético resultante

$$L = \Sigma m_i r_i^2 \omega = I \omega \tag{8.36}$$

O sea que *el momento cinético de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje es igual al producto de su mdi respecto al eje de rotación por la celeridad angular.*

Podemos ahora comprender un número de acrobacia que frecuentemente se presenta en los circos: un acróbata pende de un trapecio, cabeza abajo, soportando con la boca una cadenita cuyo otro extremo muerde otro acróbata que pende de dicha cadena y se halla con los brazos en cruz (fig. 8.12). El acróbata de arriba imprime al de abajo un par de fuerzas hasta que alcance una celeridad angular de rotación apreciable, dejando entonces de aplicarle el par. El acróbata de abajo sigue girando con celeridad angular constante ω, pues como

es nulo el momento de las fuerzas exteriores respecto al eje de rotación, se conserva el momento cinético $I\,\omega$.



CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

FIG. 8.12 Conservación del momento cinético.

Pero si pega los brazos al cuerpo, la celeridad angular toma un valor $\omega' > \omega$. Ello se debe a que, con los brazos pegados al cuerpo, su mdi es menor que antes, y como no han intervenido fuerzas *exteriores* en el tránsito de la configuración inicial (brazos en cruz) a la final, el momento cinético debe conservarse y por tanto

$$I\,\omega = I'\,\omega'$$

y como $I' < I$, $\omega' > \omega$.

Realizando el cálculo, veríamos que la energía cinética de rotación ha aumentado. El teorema de las fuerzas vivas (§ 8.4) nos dice que este aumento ha de ser igual al trabajo de todas las fuerzas, interiores y exteriores, que se ejercen sobre el sistema. En este caso, las fuerzas exteriores (peso y fuerza sustentadora) no trabajan y el aumento de energía cinética es igual al trabajo de las fuerzas que ejerce el acróbata para juntar los brazos al cuerpo, las cuales son interiores.

9

Elasticidad y choque

Todo cuanto se ha visto hasta ahora, se ha deducido de las tres leyes que fundamentan la Mecánica newtoniana, la cual, por la manera como se ha edificado, puede considerarse como Ciencia Exacta. No obstante, con ella no pueden interpretarse los fenómenos que se presentan a consecuencia de la deformación que tiene lugar en los cuerpos reales cuando se les aplican fuerzas, fenómenos cuyo estudio constituye una parte de la llamada Mecánica Física, la cual requiere una experimentación adicional que permita formular nuevas leyes que no pueden deducirse de las tres leyes de Newton. La parte de la Mecánica Física que estudia la relación existente entre las fuerzas aplicadas a los cuerpos y las deformaciones correspondientes recibe el nombre de *Elasticidad* y en ella los diferentes cuerpos reales ya no son rígidos y cada material constituyente de los cuerpos presentará propiedades características que variarán de uno a otro.

La Mecánica newtoniana no tenía en cuenta la existencia de moléculas de diferentes tipos en la estructura de la materia y de aquí que sus propiedades fueran generales para todos los cuerpos rígidos. Hoy sabemos que un cuerpo puede considerarse constituido por pequeñas partículas entre las cuales existen ciertas fuerzas de interacción que se oponen a cualquier cambio de posición de aquéllas y, por tanto, a cambios de forma del cuerpo.

9.1 Cuerpos elásticos. Si aplicamos un sistema de fuerzas exteriores a un sólido, sus partículas se desplazan ligeramente hasta una posición tal que se establece el equilibrio entre las fuerzas interiores y las que constituyen el sistema aplicado exteriormente. El cuerpo se ha deformado y se mantiene la deformación mientras subsista el sistema de fuerzas aplicado.

Si el valor de las fuerzas exteriores disminuye gradualmente, lo

mismo le ocurre a la deformación. Las fuerzas interiores tienden a restituir la posición inicial y el cuerpo puede volver a su forma primitiva. Cuando el cuerpo retorna a su forma inicial, una vez se hayan eliminado las fuerzas exteriores, se dice que es un sólido *elástico*. El que ocurra esto depende de la naturaleza del sólido y del valor de las deformaciones; si son pequeñas, en la mayoría de sólidos se anulan al desaparecer las fuerzas que las habían producido y se dice que son *deformaciones perfectamente elásticas*. Si no se anulan las deformaciones al cesar las fuerzas exteriores, el cuerpo presentará deformaciones permanentes; las deformaciones son inelásticas. Ello puede deberse a la naturaleza del cuerpo (por ejemplo, plomo) o al hecho de que las deformaciones son grandes, lo cual se indica expresando que se ha rebasado el *límite de elasticidad* (fig. 9.3).

Por debajo del límite de elasticidad, es decir, cuando el cuerpo se comporta como perfectamente elástico, las fuerzas interiores dependen únicamente de las posiciones de las partículas y derivan de un potencial escalar; el trabajo requerido para la deformación se convierte en energía potencial almacenada en el cuerpo, la cual puede reconvertirse en trabajo al retornar a la forma inicial una vez han cesado las fuerzas deformadoras.

Supongamos un cuerpo en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores. Imaginémoslo cortado por un plano *MN* (figura 9.1) y que se ha eliminado la parte del cuerpo a la izquierda de dicho plano. Para que subsista el equilibrio debemos aplicar un sis-

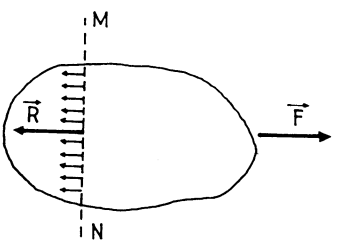


FIG. 9.1

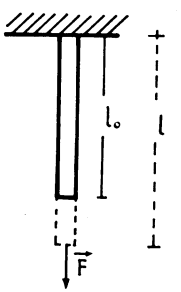


FIG. 9.2 Tracción.

tema de fuerzas equivalentes a las que ejercían las partículas situadas a la izquierda de *MN* sobre las de la derecha, antes de ser eliminadas aquéllas. Supongamos que el sistema de fuerzas exteriores aplicadas a la parte derecha pueda reducirse a una fuerza única **F** normal al plano *MN* y dirigida hacia la derecha. Las acciones de las partícu-

las de la izquierda sobre las de la derecha podemos considerar que son fuerzas dirigidas hacia la izquierda, normales a *MN*, distribuidas uniformemente sobre la sección obtenida en el cuerpo por el citado plano y equivalentes a una fuerza **R** opuesta a **F**. La razón de aquélla a la sección donde actúan las fuerzas interiores mencionadas recibe el nombre de *esfuerzo medio* $\Phi = R/S$. Si consideramos las acciones de las partículas de la derecha sobre las de la izquierda, obtendremos un esfuerzo opuesto al anterior.

Según se comprueba experimentalmente, para deformaciones pequeñas, los cuerpos elásticos cumplen la *ley de Hooke* que dice: *las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos.*

9.2 Elasticidad por tracción. Supongamos una varilla delgada suspendida verticalmente por su parte superior y en la parte inferior apliquemos una fuerza de tracción conocida. Al medir la longitud de la varilla veremos que a medida que vamos aumentando la fuerza ejercida en la parte inferior, la varilla se alarga. Llamando l a la longitud cuando la fuerza vale F y l_0 a la longitud inicial, vamos a representar gráficamente (fig. 9.3) el alargamiento unitario

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

que nos medirá la deformación, en función del esfuerzo F/S que es constante en todas las secciones rectas de la varilla (si se desprecia el peso propio).

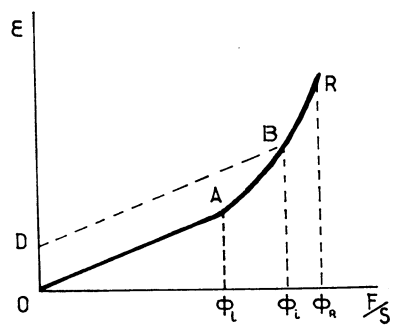


FIG. 9.3 Límites de elasticidad *A* y de ruptura *R*.

Para esfuerzos pequeños, la gráfica es recta, lo cual indica proporcionalidad entre deformación y esfuerzo. Si la fuerza cesa, la lon-

gitud vuelve a su valor inicial. Pero si aplicamos un esfuerzo $\Phi_i > \Phi_l$ se ve que desaparece la proporcionalidad y la gráfica deja de ser recta a partir de cierto punto A y al suprimir la fuerza la varilla presentará una deformación permanente $\varepsilon_p = OD$ que depende de las tensiones que se hubiesen aplicado anteriormente a la misma. A este fenómeno se le conoce con el nombre de *histeresis elástica.*

La curva termina en el punto R (límite de ruptura) correspondiente al esfuerzo Φ_R para el cual la varilla se rompería; dicho esfuerzo se llama *esfuerzo de rotura* y su valor mide la tenacidad del sólido. El punto A representa el *límite de elasticidad.* Para esfuerzos inferiores a Φ_l, el cuerpo se comporta como perfectamente elástico y se cumple la ley de Hooke. En estas condiciones podemos escribir:

$$\frac{l - l_0}{l_0} = k \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \tag{9.1}$$

donde E es el llamado *módulo de Young,* que es igual al esfuerzo dividido por el alargamiento unitario. Tiene las dimensiones de una presión y en el SI se mide en pascal (1 Pa = 1 N/m^2). Es un dato característico del material que constituye el cuerpo y los valores correspondientes a distintas sustancias están tabulados.

Si cambiamos de sentido la fuerza, la deformación cambia de signo y la compresión da lugar a un acortamiento de la varilla, regido también por la ecuación 9.1.

9.3 Contracción transversal; coeficiente de Poisson. Midiendo la sección recta de la varilla antes citada, podríamos comprobar que, a medida que el cuerpo se alarga, la sección recta disminuye. Este fenómeno se conoce con el nombre de contracción transversal. Llamando d_0 a una dimensión cualquiera de la sección de la varilla indeformada, cuando ésta tenga una longitud l dicha dimensión será d, que será menor que d_0 si la varilla se ha alargado, y mayor que d_0 si se ha acortado. Experimentalmente se demuestra que la contracción transversal unitaria es proporcional al alargamiento unitario (en régimen perfectamente elástico), es decir,

$$\frac{d_0 - d}{d} = \sigma \frac{l - l_0}{l_0} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{-\Delta d}{d} = \sigma \frac{\Delta l}{l_0}$$

A la constante de proporcionalidad σ se le llama *coeficiente de Poisson* y es un número abstracto igual al cociente entre la contracción unitaria y el alargamiento unitario correspondiente.

9.4 Deformaciones debidas a tres esfuerzos ortogonales. Consideremos un cuerpo fijo de forma ortoédrica sobre cuyas caras, normales a los ejes 1, 2 y 3, se aplican fuerzas normales a las mismas. La aplicación de una fuerza perpendicular a una cara da lugar a una variación de longitud de la dimensión paralela a la fuerza, que si ésta es de tracción será alargamiento, y a una contracción de las dimensiones perpendiculares a la dirección de la fuerza. Consideremos, para deformaciones pequeñas, la deformación unitaria ε_1 en la dirección 1; será un alargamiento unitario Φ_1/E debido al esfuerzo Φ_1 en la dirección 1 y contracciones transversales debidas a los esfuerzos Φ_2 y Φ_3. Analicemos estas últimas: la tensión Φ_2 sobre la cara de la derecha hace que se contraigan las aristas paralelas a los ejes 1 y 3, que son dimensiones transversales para dicha cara. Luego el alargamiento unitario de las aristas paralelas al eje 1 será negativo (acortamiento) y valdrá $-\sigma\,\Phi_2/E$. Análogamente, el alargamiento unitario de dicha arista debido a la acción del esfuerzo Φ_3 sobre la cara superior valdrá $-\sigma\,\Phi_3/E$, luego el alargamiento unitario que resulta para las aristas paralelas al eje 1 será:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\Phi_1 - \sigma\frac{1}{E}\Phi_2 - \sigma\frac{1}{E}\Phi_3 = \frac{1}{E}\left[\Phi_1 - \sigma\,(\Phi_2 + \Phi_3)\right]$$

sumando y restando $\sigma\,\Phi_1/E$ escribimos:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\Phi_1\,(1+\sigma) - \sigma\,(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\right] \\ \text{y análogamente} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\Phi_2\,(1+\sigma) - \sigma\,(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\Phi_3\,(1+\sigma) - \sigma\,(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9.2)$$

que podríamos condensar en una expresión única:

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E}\left[\Phi_h\,(1+\sigma) - \sigma\,\Sigma_k\,\Phi_k\right] \qquad (h = 1,\ 2,\ 3) \qquad (9.2\ bis)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones 9.2 obtenemos:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\,(1+\sigma) - 3\,\sigma\,(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)\right]$$

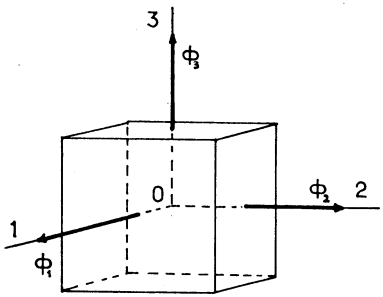


FIG. 9.4 Esfuerzos ortogonales.

o sea

$$\sum_1^3{}_h \varepsilon_h = \frac{1}{E}(1-2\sigma)\sum_1^3{}_k \Phi_k$$

despejando la suma de esfuerzos y sustituyendo en la ecuación 9.2 *bis*

$$\varepsilon_h = \frac{1}{E}\left[\Phi_h(1+\sigma) - \frac{\sigma E \sum_1^3{}_k \varepsilon_k}{1-2\sigma}\right]$$

despejando Φ_h:

$$\Phi_h = \left(\frac{E}{1+\sigma}\right)\varepsilon_h + \left(\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right)\sum_1^3{}_k \varepsilon_k$$

Haciendo

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{9.3}$$

podemos escribir:

$$\Phi_h = 2\mu\varepsilon_h + \lambda\sum_1^3{}_k \varepsilon_k \tag{9.4}$$

A los coeficientes λ y μ se les llama *coeficientes de Lamé.*

Si las dimensiones del ortoedro eran a, b y c antes de la deformación, después de la misma serán $a' = a(1+\varepsilon_1)$, $b' = b(1+\varepsilon_2)$ y $c' = c(1+\varepsilon_3)$. El volumen inicial es $V = abc$ y el final será $V' = a'b'c' = abc(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$, siendo las deformaciones pequeñas, podemos despreciar los productos binarios y el ternario de las ε, con lo cual:

$$V' = V(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

de donde

$$\frac{V' - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{9.5}$$

Luego: *La variación unitaria de volumen es igual a la suma de las deformaciones unitarias a lo largo de cada una de las direcciones ortogonales consideradas.*

Lo anterior, aunque está demostrado para un ortoedro, también valdrá para un cuerpo de forma cualquiera, pues lo podríamos considerar descompuesto en ortoedros elementales.

9.5 Compresión uniforme. Supongamos ahora que un cuerpo esté sometido a un esfuerzo de compresión uniforme, es decir, que en cualquier dirección valga $\Phi = -p$. Esto podríamos lograrlo sumergiendo totalmente un sólido en un líquido. Por razón de simetría, las deformaciones unitarias en direcciones cualesquiera serán iguales $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$. La variación unitaria de volumen (ec. 9.5) valdrá, en este caso, $(V' - V)/V = 3\,\varepsilon$ y la ecuación 9.4 se convierte en

$$-p = 2\,\mu\,\varepsilon + \lambda\,3\,\varepsilon = \frac{2}{3}\,\mu\,\frac{V' - V}{V} + \lambda\,\frac{V' - V}{V}$$

o bien

$$\frac{V' - V}{V} = -\frac{p}{\frac{2}{3}\,\mu + \lambda} = -\frac{1}{\chi}\,p \tag{9.6}$$

a χ se le llama *módulo de elasticidad cúbica* y es siempre positivo, puesto que, al aumentar la presión ($p > 0$), el volumen disminuye ($V' - V < 0$). Sus dimensiones vemos son las de una presión.

Teniendo en cuenta las ecuaciones 9.3 podemos ponerlo en función del módulo de Young y del coeficiente de Poisson:

$$\chi = \frac{2}{3}\,\mu + \lambda = \frac{E}{3\,(1 + \sigma)} + \frac{\sigma\,E}{(1 + \sigma)\,(1 - 2\,\sigma)} = \frac{E}{3\,(1 - 2\,\sigma)}$$

Esta expresión nos permite deducir que $\sigma < \frac{1}{2}$, pues χ debe ser positivo, según hemos indicado. Para una idea del orden de magnitud de χ, diremos que para el cobre $\chi = 1{,}2 \times 10^{10}$ Pa.

Al recíproco de χ se le llama *compresibilidad* del cuerpo, y vemos que cuanto más compresible sea éste, tanto menor ha de ser el esfuerzo que origina una compresión dada y, en consecuencia, tanto menor será χ y tanto mayor su recíproco, la compresibilidad.

9.6 Cizalladura. Consideremos un cubo con la cara básica fija. Apliquemos a la cara superior un esfuerzo tangencial uniforme Φ_t y observaremos que el cuerpo se deforma adoptando la forma indicada en la figura 9.5. Considerando distintas secciones paralelas a la base, éstas deslizan una respecto a otra. El cuerpo cambia de forma pero no de volumen, dado que no varían ni el área de la base ni la altura. Para deformaciones pequeñas, mediremos la deformación por el ángulo α girado, el cual, en virtud de la ley de Hooke, es proporcional al esfuerzo tangencial, es decir,

$$\alpha = \frac{1}{G}\Phi_t \tag{9.7}$$

Puede demostrarse que G, llamado *módulo de rigidez,* es igual al coeficiente de Lamé μ, que para el cobre vale $4{,}5 \times 10^{10}$ Pa. Un cuerpo muy rígido, para deformarlo por cizalladura un ángulo α dado, precisa de un esfuerzo Φ_t muy grande, mientras que otro poco rígido precisaría de un esfuerzo menor para deformarlo el mismo ángulo. De la ecuación 9.7 se deduce, pues, que el cuerpo más rígido tiene mayor módulo de rigidez que el otro.

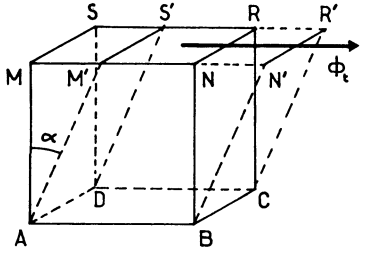


FIG. 9.5 Cizalladura.

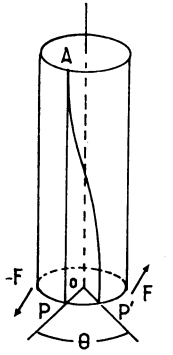


FIG. 9.6 Torsión.

9.7 Torsión. Consideremos una varilla cilíndrica vertical que tenga fijo su extremo superior. Al aplicar a su extremo inferior un par de fuerzas cuyo momento tenga la dirección del eje, observaremos que experimenta un giro que depende del valor de dicho momento. Considerando distintas secciones paralelas a las bases observaremos que el ángulo girado es tanto mayor cuanto más próxima a la base esté la sección considerada.

Sea un punto P de la circunferencia básica (fig. 9.6). Al aplicar el par de fuerzas, gira hasta ocupar la posición P' y al ángulo θ que forma OP' con OP

le llamaremos *ángulo de torsión.* La generatriz AP se convierte, después de la deformación, en una hélice AP'. A esta deformación se le da el nombre de *torsión* y viene medida por el ángulo de torsión, que, en virtud de la ley de Hooke, deberá ser proporcional al momento torsor M, o sea $M = k\,\theta$, siendo k la constante de torsión. Esta expresión puede escribirse en la forma

$$\theta = \frac{2\,h\,M}{\pi\,R^4\,G}$$

donde R es el radio del cilindro, M el momento torsor, h la distancia al extremo fijo y G el módulo de rigidez del material.

9.8 Energía elástica. En el § 9.1 hemos indicado que el trabajo de deformación se almacena en forma de energía potencial, a la que llamamos energía elástica.

Es fácil calcularla en el caso de la tracción. Para ello, llamemos x al alargamiento producido por una fuerza F y será, en virtud de la ecuación 9.1,

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \qquad \text{de donde} \qquad F = \frac{E\,S}{l}\,x$$

y esta fuerza efectúa un trabajo al alargar el cuerpo que será igual a la energía elástica que éste almacena. Tendremos, pues,

$$U = \int_0^x F\,dx = \frac{E\,S}{l}\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{E\,S}{l}\,x^2$$

En el caso de la torsión, como $M = k\,\theta$ y $dW = M\,d\theta$ (cfr. ecuación 8.28), se tendrá

$$U = \int_0^{\theta_1} k\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,k\,\theta_1^2$$

como energía elástica almacenada en una torsión de ángulo θ_1.

9.9 Percusión. Consideremos una fuerza $\mathbf{F}$ (o la resultante de un sistema de fuerzas) aplicada a *un punto material* durante un intervalo de tiempo Δt suficientemente corto para poder despreciar el desplazamiento del punto. Al impulso de dicha fuerza durante Δt se le da el nombre de *percusión* $\mathbf{P}$, es decir,

$$\mathbf{P} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{F}\,dt$$

$\mathbf{P}$ es un vector que puede considerarse fijo, aplicado al punto. Recor-

dando la relación entre impulso y cantidad de movimiento (ec. 7.14),

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v} - m\,\mathbf{v}_0$$

Si aplicamos una percusión a *un cuerpo rígido*, podemos deducir: 1.° Del teorema del cdm (ec. 8.17), que *la variación de la cantidad de movimiento del cdm (considerando concentrada en él toda la masa del cuerpo) es igual a la percusión.* 2.° Del teorema del momento cinético (ec. 8.14), que *la variación del momento cinético de un cuerpo rígido respecto a un punto fijo, al aplicarle una percusión, es igual al momento de la percusión respecto a dicho punto fijo.*

Aplicación a una bola de billar: Con el taco horizontal aplicamos una percusión **P** a una bola de billar de radio R y masa m, estando **P** contenida en un plano vertical que pasa por el centro de la bola y distante a de éste. La bola parte del reposo y vamos a determinar su movimiento.

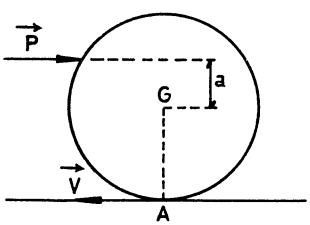


FIG. 9.7

La percusión, por ser horizontal, no da origen a percusión de reacción en el apoyo. En virtud del teorema 1.° antes enunciado, la velocidad que tomará el cdm será

$$\mathbf{v}_G = \frac{\mathbf{P}}{m}$$

y el momento cinético respecto a un eje horizontal que pase por el cdm será $L = P\,a$ y coincide con su variación porque parte del reposo. La velocidad angular será horizontal, normal al plano del papel y dirigida hacia su interior. El movimiento de un punto de la bola será la superposición de una traslación de velocidad $\mathbf{v}_G$ y una rotación en torno al cdm de celeridad angular

$$\omega = \frac{P\,a}{I} = \frac{5\,P\,a}{2\,m\,R^2}$$

si recordamos que en un cuerpo rígido $L = I\,\omega$ y que el mdi respecto a un diámetro de una esfera homogénea de radio R es $I = \frac{2}{5}\,m\,R^2$.

Como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + (G - A) \wedge \omega$$

la celeridad del punto A de contacto con la mesa será:

$$v = v_G - \omega R = \frac{P}{m}\left(1 - \frac{5a}{2R}\right)$$

Si $a > 2R/5$, será $v < 0$. Es decir, la velocidad será horizontal y estará dirigida hacia la izquierda. Si el valor de a fuese $2R/5$, sería $v = 0$, no habría deslizamiento en A y la bola rodaría sin deslizar.

9.10 Centro de percusión. Sea un cuerpo de cdm G y apliquémosle una percusión $\mathbf{P}$ horizontal contenida en el plano del papel, en el cual se halla G, y que corte a la vertical de G en el punto O, que to-

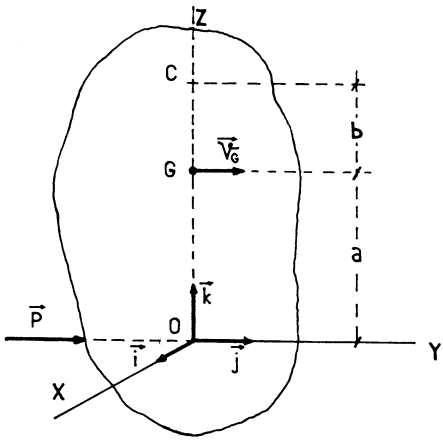


FIG. 9.8. Centro de percusión.

maremos como origen de un sistema de ejes de coordenadas $Oxyz$, según se indica en la figura 9.8. En este sistema será $\mathbf{P} = P\,\mathbf{j}$ y la velocidad del cdm

$$\mathbf{v}_G = \frac{\mathbf{P}}{m} = \frac{P}{m}\mathbf{j}$$

La velocidad del punto C distante b de G será (cfr. ec. 5.12)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + (G - C) \wedge \boldsymbol{\omega} \tag{9.8}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I_G} \qquad \text{siendo} \qquad \mathbf{L} = (O - G) \wedge \mathbf{P} = a\,P\,\mathbf{i}$$

luego

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{a\,P}{I_G}\mathbf{i}$$

y sustituyendo en la ecuación 9.8, teniendo en cuenta las ecuaciones 1.15 y 1.12,

$$\mathbf{v} = \frac{P}{m}\mathbf{j} + \frac{a\,b\,P}{I_G}(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) = \left(\frac{P}{m} - \frac{a\,b\,P}{I_G}\right)\mathbf{j} = \frac{P}{m}\left(1 - \frac{a\,b\,m}{I_G}\right)\mathbf{j}$$

la velocidad del punto C será nula si $b = \dfrac{I_G}{a\,m}$.

Supongamos que el cuerpo pueda girar alrededor de un eje paralelo a Ox y que pase por C. Al aplicar la percusión no se producirá reacción de percusión en el eje, ya que éste no tiende a moverse, y el cuerpo girará alrededor de éste con celeridad angular constante $\omega = v_G/GC$. Al punto O se le llama *centro de percusión*, y la distancia del punto C a la percusión es

$$OC = a + b = a + \frac{I_G}{a\,m} = \frac{m\,a^2 + I_G}{a\,m} \tag{9.9}$$

o en función de b

$$OC = \frac{I_G}{m\,b} + b = \frac{m\,b^2 + I_G}{m\,b} = \frac{I_G}{m\,b}$$

donde se ha aplicado el teorema de Steiner (ec. 8.27). OC es la *longitud reducida* de un péndulo físico que oscile alrededor de un eje horizontal que pase por C (cfr. § 10.4). Si lo hacemos oscilar alrededor de O y le aplicamos la percusión en C veremos que C es el centro de percusión, y la longitud reducida, en este caso, es $I_0/m\,a$, que según la ecuación 9.9 es precisamente OC. Los puntos O y C son el centro de oscilación y de suspensión y recíprocamente (péndulo reversible).

9.11 Choque. Cuando un sistema material choca, cada uno de sus elementos sufre una variación finita de velocidad en un tiempo muy corto, lo cual entraña la existencia de aceleraciones muy grandes y por tanto de fuerzas muy intensas durante el tiempo de choque. Así pues, sobre cada elemento se ejercerá una percusión, y según lo visto en el § 9.9, en el caso de choque de dos cuerpos podemos decir que *la variación de la velocidad del cdm es la misma que tendría si toda la masa estuviera concentrada en él, estando a él aplicadas todas las percusiones.*

La variación del momento cinético respecto a un punto fijo es igual al momento resultante, con respecto a este punto, de las percusiones.

Solamente habrá que considerar, en estos dos teoremas, las percusiones *exteriores* al sistema, pues como las interiores son opuestas dos a dos en virtud del principio de igualdad de la acción y la reacción, su contribución al considerarlas aplicadas al cdm será nula, así como su contribución al momento resultante respecto al punto fijo considerado.

Ahora bien, en el choque de dos cuerpos, no conocemos las fuerzas de contacto que se ejercen durante el choque y por tanto no conocemos las percusiones, aunque sí pueden conocerse sus direcciones. Para determinar las velocidades de los cuerpos después del choque no disponemos de un número suficiente de ecuaciones, por lo que deberemos formular alguna hipótesis, relativa a la naturaleza elástica del cuerpo, que nos proporcione las ecuaciones necesarias para tener un sistema determinado. En los cuerpos perfectamente elásticos, las fuerzas interiores derivan de un potencial (cfr. § 9.8), es decir, que el trabajo realizado para deformar un cuerpo se almacena en él en forma de energía potencial de deformación, la cual desaparece al recuperar el cuerpo su forma primitiva convirtiéndose en energía cinética. Por eso la energía cinética total del sistema se conserva. Mejor dicho: la suma de las energías cinéticas de los cuerpos antes y después del choque (si no hay rozamiento) es igual a la suma de las energías cinéticas después del choque.

Dado que en el choque son nulas las percusiones exteriores al sistema, la variación de la cantidad de movimiento total debe ser nula. Si el choque es central, es decir, si coinciden las trayectorias de los cdm, los momentos de las percusiones respecto a los cdm son nulos (suponemos que no hay rozamiento en el choque) y por tanto no se modifican las velocidades de rotación. En el choque central las ecuaciones serán: 1.º La que traduce la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, la cual cumplen todos los choques cualquiera que sea su índole. 2.º La que traduce la conservación de la energía cinética que corresponde a la hipótesis formulada de que los cuerpos son perfectamente elásticos. Como las rotaciones de los cuerpos permanecen invariables, lo mismo les sucederá a las energías cinéticas de rotación, por lo que la conservación de la energía cinética se podrá expresar mediante la ecuación que traduzca la conservación de la energía cinética de traslación.

Así pues, si es m_1 la masa del primer cuerpo, cuyo cdm se mueve con la velocidad v_1, m_2 la masa del segundo, cuyo cdm se mueve con

velocidad v_2, ambos en la misma dirección y sentido, la conservación de la cantidad de movimiento nos da la ecuación

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{9.10}$$

v'_1 y v'_2 son las velocidades respectivas de los cdm de los cuerpos 1 y 2 después del choque. Si una de las velocidades v_1 o v_2 tuviera sentido contrario al supuesto, deberá tomarse negativa en la ecuación 9.10.

Por su parte, la conservación de la energía cinética de traslación da:

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{9.11}$$

Las ecuaciones 9.10 y 9.11 pueden escribirse en la forma:

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \tag{9.10 bis}$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \tag{9.11 bis}$$

y dividiéndolas miembro a miembro tenemos

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \text{o bien} \quad v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)$$

esto indica que las velocidades relativas respecto al cuerpo 2 del punto de contacto del cuerpo 1, antes y después del choque, son iguales y de signo contrario (no olvidemos que las rotaciones no se han modificado).

En el choque de dos cuerpos reales podremos escribir

$$v_1' - v_2' = -k (v_1 - v_2) \tag{9.12}$$

donde k es un coeficiente característico de los cuerpos que chocan, llamado *coeficiente de percusión,* que la experiencia enseña que es independiente de la velocidad relativa entre muy amplios límites y que $0 < k < 1$. Si fuese $k = 1$ nos encontraríamos en el caso ideal de choque perfectamente elástico, y si $k = 0$ el choque es totalmente inelástico y $v_1' = v_2'$. De las ecuaciones 9.12 y 9.10 podemos calcular las velocidades v_1' y v_2', obteniendo:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Y para el caso de choque perfectamente elástico ($k = 1$) resulta

$$v_1' = \frac{2\,m_2\,v_2 + v_1\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2\,m_1\,v_1 + v_2\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \qquad (9.14)$$

En el choque totalmente inelástico $k = 0$ y tendremos

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1\,v_1 + m_2\,v_2}{m_1 + m_2}$$

En caso de cuerpos reales, si suponemos que la masa m_2 es mucho mayor que m_1 y suponemos, además, $v_2 = 0$, tendremos:

$$v_2' = 0 \qquad v_1' = -k\,v_1$$

De aquí podemos obtener un método para calcular k. El segundo cuerpo se fija en el suelo y se deja caer sobre él el otro desde una altura h. Si despreciamos la resistencia del aire llegará al suelo con una velocidad $v_1 = \sqrt{2\,g\,h}$ y después del choque la velocidad será $v_1' = -k\,v_1$, con lo que alcanzará una altura $h' = v_1'^2/2\,g = k^2\,h$, con lo que tendremos

$$k = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

Midiendo, pues, la altura máxima alcanzada tras el rebote y conociendo la altura desde la que ha caído una bola, podremos calcular el coeficiente de percusión correspondiente a los materiales de los dos cuerpos en colisión.

10

Vibraciones

Un punto en movimiento durante un tiempo muy largo, no tiene por qué alejarse demasiado de una posición fija, sino que puede mantenerse siempre a una distancia no demasiado grande de dicha posición repitiendo sus posiciones a intervalos de tiempo fijos, en cuyo caso se dice que el movimiento es *periódico*. Es decir, las coordenadas del punto móvil serían funciones periódicas del tiempo. En este capítulo vamos a estudiar algunos de los movimientos periódicos más importantes, bajo el doble aspecto cinemático y dinámico.

10.1 Movimiento armónico simple. Muchos problemas de la Física, clásica y cuántica, pueden reducirse formalmente al estudio de un movimiento sencillo: el movimiento armónico. Consideremos un punto material de masa m en la posición P (fig. 10.1) sometido a una fuerza dirigida siempre hacia un punto fijo O y cuyo módulo es pro-

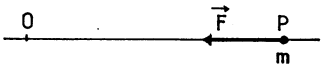


FIG. 10.1

porcional a la distancia PO. Si la velocidad inicial del punto es nula o tiene la misma dirección que la fuerza, el movimiento del punto es un *movimiento armónico simple* (m.a.s.).

Tomando la dirección OP como eje x de un sistema de coordenadas de origen el punto O, la fuerza sólo tiene componente x y si el sentido tomado como positivo en dicho eje es el de O a P, la componente x de la fuerza es $F = -k\,x$, indicando por k la constante de proporcionalidad, cuyas dimensiones son $M\,T^{-2}$.

Para encontrar la ecuación del movimiento, escribiremos la segunda ley de Newton de la manera siguiente:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{y} = 0 \qquad m\ddot{z} = 0$$

de las dos últimas se deduce $\dot{y} = \text{const.}$, $\dot{z} = \text{const.}$, pero como la velocidad inicial o es nula o sólo tiene componente x, será $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$, con lo cual $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ y dado que la posición inicial del punto está sobre el eje x, la constante es nula en cada caso y deducimos que la trayectoria se halla sobre la recta Ox.

La primera ecuación la podemos escribir en la forma

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

y haciendo $\omega^2 = k/m$, lo cual es posible porque k es positiva, tendremos

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{10.1}$$

o bien, llamando v a la velocidad, que sólo tiene componente x,

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

pero

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

y la ecuación anterior quedaría en la forma

$$v\frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \qquad \text{de donde} \qquad v\,dv = -\omega^2 x\,dx$$

que integrada da

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2\frac{x^2}{2} + C$$

para determinar el valor de la constante de integración C que corresponde al problema físico diremos: si para $x = 0$, $v = v_0$, tendremos

$$\tfrac{1}{2}v_0^2 = C$$

y podemos escribir

$$v^2 = v_0^2 - \omega^2 x^2$$

de donde

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 x^2}{v_0^2}}$$

o bien

$$\frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \omega^2 x^2 / v_0^2}} = dt$$

haciendo el cambio de variable

$$x \frac{\omega}{v_0} = u \qquad dx = \frac{v_0}{\omega} du$$

queda

$$\frac{du}{\omega \sqrt{1 - u^2}} = dt$$

que integrada da

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,sen} u = t + C' \qquad \text{o sea} \qquad u = \operatorname{sen} (\omega t + \omega C')$$

donde C' es una constante de integración. Llamando $\theta_0 = \omega C'$ y deshaciendo el anterior cambio de variable resulta

$$x = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$

y si para $t = 0$ la abscisa de la posición inicial es x_0,

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \theta_0 \qquad \text{o sea} \qquad \theta_0 = \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega x_0}{v_0}$$

En el instante en que se cumpla la condición $\omega t + \theta_0 = \pi/2$, x tiene valor máximo, al cual llamamos *amplitud*, que es $A = v_0/\omega$, y la ecuación del movimiento queda en la forma

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0) \tag{10.2}$$

Para la velocidad tenemos

$$v = \dot{x} = A \omega \cos (\omega t + \theta_0) = v_0 \cos (\omega t + \theta_0)$$

lo que nos indica que la velocidad es máxima, v_0, cuando el punto móvil pasa por O.

Para la aceleración tenemos

$$\ddot{x} = -A\,\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$$

que es de donde hemos partido.

A la distancia x de P a O se le da el nombre de *elongación,* por lo que la amplitud A es la elongación máxima. A $\omega t + \theta_0$ se le llama ángulo de fase, a θ_0 *fase inicial* y a $\omega = \sqrt{k/m} = v_0/A$ se le llama *pulsación.* Empezando a medir el tiempo a partir del instante en que el punto pasa por O, será nula la fase inicial θ_0 y la ecuación del movimiento será $x = A \operatorname{sen} \omega t$.

Dado que la ecuación del movimiento es una función sinusoidal del tiempo, será periódica. Se llama *período* al intervalo de tiempo T transcurrido el cual el punto se halla, por primera vez, en el mismo estado de movimiento. Para ello, los dos ángulos de fase correspondientes a los instantes t_2 y t_1, tales que $t_2 - t_1 = T$, deben diferir en 2π. Luego

$$\omega t_2 + \theta_0 - (\omega t_1 + \theta_0) = 2\pi \qquad \text{o sea} \qquad \omega (t_2 - t_1) = 2\pi$$

de donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{10.3}$$

es evidente que T es también le período de la velocidad y de la aceleración. Transcurrido el período, el punto se encuentra en la misma posición anterior, con la misma velocidad y la misma aceleración.

Notemos qué en el punto $x = A$ (lo mismo podríamos decir del $x = -A$) la velocidad se anula y cambia de sentido. Este tipo de movimiento de vaivén en el que se invierte bruscamente el sentido de movimiento a intervalos regulares de tiempo (en un semiperíodo $T/2$) recibe el nombre de *oscilatorio* y, a veces, *vibratorio.* Esta última denominación suele adoptarse cuando el período es pequeño. Se dice que el punto ha efectuado una oscilación simple en un semiperíodo y una oscilación completa en un período. Al decir *oscilación,* a secas, se sobrentiende una oscilación completa, a la que también se llama ciclo. Al número de oscilaciones o ciclos por unidad de tiempo se le da el nombre de *frecuencia,* que será

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia se mide con una unidad llamada *hertz* (Hz), a la que también se le dan los nombres de oscilación/segundo o ciclo/se-

gundo (c/s). Se utilizan mucho los múltiplos *kilohertz* (kHz) y *megahertz* (MHz).

10.2 Significado cinemático de ω. Sea un punto que describa una circunferencia de radio A con celeridad angular constante ω. Si empezamos a medir el tiempo a partir del instante en que el punto ocupa la posición P_0 (fig. 10.2) y el ángulo que forma el radio móvil OP con el radio OP_0 lo medimos positivamente en el sentido de giro de las agujas del reloj y llamamos θ_0 al ángulo $\angle P_0Oy$, la

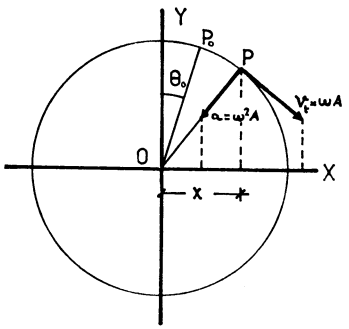


FIG. 10.2 Movimiento circular asociado al m.a.s.

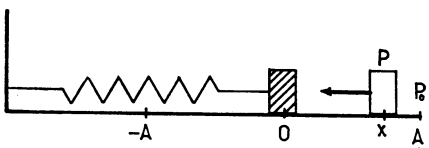


FIG. 10.3

proyección sobre el eje x, en un instante t, del punto móvil P (el ángulo $\angle POP_0$ será ωt) la podemos escribir en la forma

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$

La proyección de la velocidad será

$$v = \omega A \cos (\omega t + \theta_0)$$

y la de la aceleración

$$a = -\omega^2 A \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$$

de donde resulta que la proyección de P se mueve con m.a.s. de amplitud A, fase inicial θ_0 y pulsación igual a la velocidad angular. El período del movimiento circular es el mismo que el del m.a.s., $T = 2\pi/\omega$ y la frecuencia $f = 1/T$, y como $\omega = 2\pi f$, a ω se le llama, a veces, *frecuencia angular* además de pulsación. El m.a.s. puede considerarse, pues, como el de la proyección, sobre un diámetro, de un punto que describa una circunferencia de radio igual a la amplitud y que se mueve con una celeridad angular ω igual a la pulsación

del m.a.s. También puede considerarse como el movimiento del extremo de una de las proyecciones de un vector de módulo constante e igual a la amplitud, que teniendo el origen fijo su extremo describe una circunferencia con celeridad constante.

Recordando que

$$e^{i(\omega t+\theta_0)} = \cos(\omega t + \theta_0) + i \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

podemos formular la ecuación del m.a.s. diciendo que es la parte imaginaria de $A\, e^{i(\omega t+\theta_0)}$.

10.3 Algunos m.a.s. 1.º *Oscilación de una masa unida a un resorte.* Consideremos un resorte con un extremo fijo y una masa m sujeta al otro extremo y apoyada en un plano horizontal liso de la manera indicada en la figura 10.3. La posición de equilibrio es O y la tomaremos como origen de abscisas. Desplacemos la masa hasta una posición P_0 de abscisa A. La fuerza que se ejerce sobre la masa en una posición P de abscisa x es $F = -k\,x$, ya que la fuerza es proporcional a la deformación y está dirigida hacia O; k es la llamada *constante elástica* o recuperadora del resorte.

Al soltar la masa, el movimiento es un m.a.s. de amplitud A, que oscila en torno al punto O. Su ecuación es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{siendo} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si medimos el tiempo a partir del instante en que soltamos la masa, como en él $x_0 = A \operatorname{sen} \theta_0$, será $\theta_0 = \pi/2$, pues $x_0 = A$, con lo cual

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t \tag{10.4}$$

y la velocidad

$$v = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

El período $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(m/k)}$ será tanto mayor cuanto mayor sea m y menor la constante elástica k.

La aceleración es nula y la celeridad máxima cuando pasa por O; tenemos entonces

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A$$

2.º *Péndulo simple.* Una masa de pequeño tamaño suspendida por un hilo de longitud constante l y masa despreciable frente a la otra, constituye un péndulo simple. Si se separa de su posición de equilibrio de manera que el hilo forme un ángulo θ con la vertical (fig. 10.4), al soltarla oscilará en torno a su posición de equilibrio. Vamos a demostrar que, si el ángulo es pequeño, el movimiento puede considerarse como m.a.s.

En la posición indicada en la figura 10.4, las fuerzas que se ejercen sobre la masa son: su peso, $m\,g$, vertical y hacia abajo, y la tensión del hilo, dirigida según éste. Si descomponemos el peso en esta dirección y en su perpendicular, ésta será tangente al arco que recorre la masa y tendremos: $F = -mg$ sen θ y llamando T a la tensión del hilo, $T - mg$ sen $\theta = v^2/l$; pero si confundimos el arco con la cuerda, el movimiento será rectilíneo y no habrá aceleración normal ($v^2/l = 0$. Entonces, la segunda ley de Newton nos permite escribir.

$$m\ddot{s} = -m\,g \text{ sen } \theta \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{s} = -g \text{ sen } \theta$$

pero sen $\theta = x/l$; y si el ángulo es pequeño s y x son aproximadamente iguales y el movimiento podrá considerarse rectilíneo al confundir el arco con la cuerda, con lo cual

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

lo cual indica que el movimiento es un m.a.s. en el que $\omega^2 = g/l$ y el período es, en consecuencia,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{10.5}$$

Separando el péndulo de su posición de equilibrio un ángulo de 2°, el error relativo introducido en el cálculo del período por la aproximación hecha resulta inferior al 0,01 %.

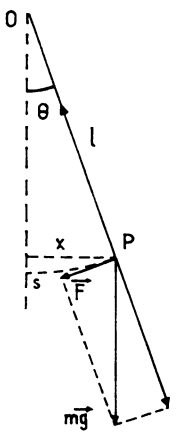


FIG. 10.4 Péndulo simple.

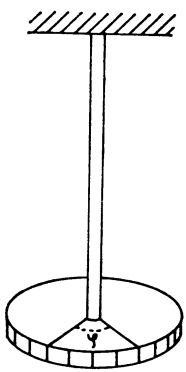


FIG. 10.5

Según la fórmula anterior, el período T es independiente de la amplitud de las oscilaciones y todas ellas se efectúan con el mismo período, hecho ya observado por GALILEO y que encontró su aplicación en la medida del tiempo. Como el período depende de g, variará al trasladarlo de un lugar a otro y podría utilizarse para la medida de g.

10.4 M.a.s. angular. Todos los puntos de un sólido rígido que gira en torno a un eje fijo describen trayectorias circulares con la misma celeridad y aceleración angulares en un mismo instante (confrontar § 5.2). Supongamos que la aceleración angular de un punto cualquiera sea proporcional al ángulo girado y de sentido contrario al mismo, o sea que

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$$

siendo ω^2 la constante de proporcionalidad. Por ser esta ecuación formalmente igual a la ecuación 10.1, su integral será de la forma

$$\varphi = \Phi \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$

el movimiento de dicho punto es un m.a.s., pero la elongación es un ángulo, lo mismo que la amplitud. A este tipo de movimiento se le da el nombre de m.a.s. angular o de rotación. La pulsación continúa siendo ω, el período $T = 2\pi/\omega$ y la frecuencia $f = 1/T$. θ_0 es la fase inicial que, si llamamos φ_0 al valor del ángulo φ en el instante $t = 0$, valdrá $\theta_0 = \operatorname{arc\,sen} (\varphi_0/\Phi)$.

Si es M el momento resultante respecto al eje del sistema de fuerzas que producen el movimiento, la ecuación 8.23 permite escribir

$$M = I\ddot{\varphi} \qquad \text{siendo} \qquad \ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$$

luego

$$M = -I\omega^2 \varphi$$

o sea que el momento resultante es proporcional al ángulo y de signo contrario, siendo la constante de proporcionalidad el producto del mdi I relativo al eje de giro por el cuadrado de la pulsación.

Ejemplos: 1.º Se hace girar un ángulo φ a un disco homogéneo suspendido por un hilo en la forma indicada en la figura 10.5. El alambre experimenta una torsión cuyo par tiene por momento $-k\varphi$ (cfr. § 9.7) y donde el signo — indica que se opone al par aplicado. Al soltarlo, se suprime éste y el disco oscila con m.a.s. de rotación. En efecto: sabemos que el momento del par de torsión $M = I\ddot{\varphi} = -k\varphi$, por lo que

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k}{I}\varphi$$

y haciendo $k/I = \omega^2$ obtenemos la ecuación del m.a.s. angular. Se tendrá, pues,

$$\varphi = \Phi \operatorname{sen} (\omega t + \theta_0)$$

siendo la pulsación $\omega = \sqrt{k/I}$.

Si empezamos a medir el tiempo a partir del instante en que el ángulo es Φ, será $\theta_0 = \pi/2$ y la ecuación es

$$\varphi = \Phi \cos \sqrt{k/I}\, t \tag{10.6}$$

Como el período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \tag{10.7}$$

midiéndolo podemos hallar la constante de torsión k y de ella (cfr. § 9.7) obtener el módulo de rigidez del material del alambre.

2.° *Péndulo físico.* Consiste en un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje horizontal fijo que no pasa por su cdm. En la figura 10.6 representamos una sección del cuerpo por un plano vertical normal al eje y que contiene al cdm G. La intersección del eje de giro con dicho plano es el punto O, y representaremos por h a la distancia OG. La única fuerza exterior

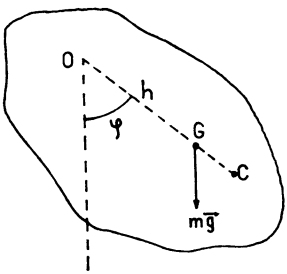


FIG. 10.6 Péndulo físico.

que se ejerce sobre el cuerpo es su peso. El momento de éste respecto al eje de giro vale $M = -m\,g\,h \operatorname{sen}\varphi$. Como en el ejemplo anterior, el signo — indica que el momento se opone al aumento del ángulo. La ecuación 8.23 podrá escribirse en la forma

$$-m\,g\,h \operatorname{sen}\varphi = I\ddot{\varphi} \quad \text{y haciendo sen } \varphi \simeq \varphi: \quad \ddot{\varphi} = -\frac{m\,g\,h}{I}\varphi$$

donde I es el mdi del cuerpo respecto al eje de giro y esta ecuación indica que el movimiento es un m.a.s. de pulsación

$$\omega = \sqrt{\frac{m\,g\,h}{I}}$$

o sea de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m\,h\,g}} \tag{10.8}$$

y haciendo

$$\lambda = \frac{I}{m\,h} \tag{10.9}$$

la ecuación 10.8 queda en la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

es decir, el período coincide con el de un péndulo simple cuya longitud fuese $l = \lambda$. A este valor λ se le llama *longitud reducida* del péndulo físico, Si a lo largo de la dirección OG tomamos una longitud $OC = \lambda$, al punto C se le llama *centro de oscilación*. Si imaginamos toda la masa del péndulo físico concentrada en el centro de oscilación y la unimos a O por un hilo inextensible de masa despreciable, tendremos un péndulo simple del mismo período que el péndulo físico. El punto C es el centro de percusión (cfr. § 9.10).

Consideremos la oscilación del cuerpo en el caso en que el eje pasara por C y calculemos la longitud reducida λ'. Tenemos:

$$\lambda' = \frac{I_C}{m(\lambda - h)}$$

y aplicando el teorema de Steiner

$$\lambda' = \frac{I_G + m(\lambda - h)^2}{m(\lambda - h)} = \frac{I_G}{m(\lambda - h)} + \lambda - h \qquad (10.10)$$

pero

$$\lambda = \frac{I_G + m h^2}{m h} \qquad \text{de donde} \qquad I_G = \lambda m h - m h^2$$

y sustituyendo en la ecuación 10.10

$$\lambda' = \frac{(\lambda - h) m h}{m(\lambda - h)} + \lambda - h = \lambda$$

con lo que vemos que el nuevo centro de oscilación es O.

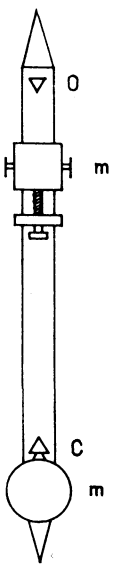


FIG. 10.7. Péndulo de Kater: m' es la masa móvil.

El péndulo oscilando en torno a un eje horizontal que pase por O o por C tiene el mismo período. En esto se basa el péndulo reversible: Se suspende un péndulo de un eje que pase por O y se mide su período T. Se invierte el péndulo y se busca otro punto C tal que al hacer oscilar el péndulo suspendido de C lo haga con el mismo período T. La distancia entre estos dos puntos O y C es la longitud reducida. Esta propiedad fue aprovechada por KATER en el péndulo que lleva su nombre (fig. 10.7) y en el que desplazando la masa móvil se logran períodos iguales de oscilación al suspenderlo de la cuchilla O o de la cuchilla C. Cuando se ha logrado esto, la distancia entre las cuchillas, que puede medirse con gran precisión, es la longitud reducida del péndulo, y midiendo su período podemos lograr una determinación precisa de la aceleración g de la gravedad.

10.5 Fuerza central atractiva y proporcional a la distancia. Supongamos que un punto material de masa m ocupa una posición P en un campo de fuerzas cen-

tral de centro O y que el módulo de la fuerza, dirigida hacia O, sea proporcional a la distancia $OP = r$. Si la velocidad inicial del punto material es nula o tiene la misma dirección que la fuerza, el movimiento será un m.a.s. a lo largo de la recta que une con O a la posición inicial (cfr. § 10.1).

Vamos a estudiar el caso en que la velocidad inicial y la fuerza no tengan la misma dirección. En el § 7.10 vimos que el movimiento debe ser plano y cumplir la ley de las áreas. Por ser plano, tomaremos O como origen de coordenadas de un sistema Oxy de ejes ortogonales contenidos en el plano del movimiento. La fuerza $\mathbf{F}$ tiene por módulo $F = -k\,r$, siendo k una constante de proporcionalidad. Si llamamos X, Y a las componentes de la fuerza y x, y a las coordenadas del punto, tendremos

$$X = -k\,x \qquad Y = -k\,y$$

y a las componentes de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ las designaremos por $\dot{x}_0$ e $\dot{y}_0$.

La segunda ley de Newton nos permite escribir

$$m\,\ddot{x} = X = -k\,x \qquad m\,\ddot{y} = Y = -k\,y$$

que podemos poner en forma análoga a la de la ecuación 10.1:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad \ddot{y} = -\frac{k}{m}y \tag{10.11}$$

resultando ambos períodos iguales a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10.12}$$

Las soluciones de las ecuaciones 10.11 son

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \theta_1) \qquad y = B\,\text{sen}\,(\omega\,t + \theta_2) \tag{10.13}$$

siendo $\omega = 2\pi/T$, y la velocidad tendrá por componentes

$$\dot{x} = A\,\omega\cos(\omega\,t + \theta_1) \qquad \dot{y} = B\,\omega\cos(\omega\,t + \theta_2)$$

para $t = 0$ la posición inicial es el punto de coordenadas x_0, y_0, siendo las componentes de la velocidad inicial $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$. Luego

$$x_0 = A\,\text{sen}\,\theta_1 \qquad \dot{x}_0 = A\,\omega\cos\theta_1$$
$$y_0 = B\,\text{sen}\,\theta_2 \qquad \dot{y}_0 = B\,\omega\cos\theta_2$$

de donde

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0} = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \theta_1 \qquad \frac{y_0}{\dot{y}_0} = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \theta_2$$

o sea

$$\theta_1 = \operatorname{arc\ tg} \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \qquad \theta_2 = \operatorname{arc\ tg} \frac{\omega y_0}{\dot{y}_0}$$

$$x_0^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \qquad \frac{1}{\omega^2} \dot{x}_0^2 = A^2 \cos^2 \theta_1$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \\ B &= \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (10.14)$$

y análogamente

Tenemos así determinado el movimiento en función de los valores iniciales de la posición y la velocidad. Para determinar la trayectoria hay que eliminar t entre las dos ecuaciones 10.13. Para que resulte más fácil, podemos desplazar la escala de tiempos de manera que tomemos un tiempo $t' = t + (\theta_2/\omega)$ con lo cual $t = t' - (\theta_2/\omega)$ y las ecuaciones 10.13 se convierten en

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t' - \theta_2 + \theta_1) \qquad y = B \operatorname{sen} \omega t'$$

y haciendo $\theta = \theta_1 - \theta_2$,

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t' + \theta) \qquad y = B \operatorname{sen} \omega t' \qquad (10.13\ bis)$$

Desarrollando la primera de las ecuaciones 10.13 *bis*, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} \omega t' = y/B$, tenemos

$$\frac{x}{A} = \operatorname{sen} \omega t' \cos \theta + \cos \omega t' \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{B} \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} \operatorname{sen} \theta$$

de donde

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \cos \theta \right)^2 = \left(1 - \frac{y^2}{B^2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta$$

que efectuando operaciones queda

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\theta = \operatorname{sen}^2\theta \qquad (10.15)$$

que nos dice que la trayectoria es una elipse (fig. 10.8), según puede comprobarse, que en el caso particular de $\theta = \pi/2$ está referida a sus

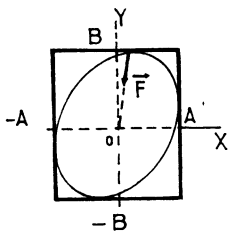


FIG. 10.8

propios ejes. En cambio, si $\theta = n\pi$ (siendo n un número entero) resulta:

si n es par,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0$$

si n es impar

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0$$

El tiempo empleado por el punto en recorrer la elipse es igual al período T. Al recorrerla, cumplirá la ley de las áreas (cfr. § 7.10), es decir, la velocidad areolar deberá ser constante, o sea

$$\tfrac{1}{2}\,|\,\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\,| = \text{const.}$$

Como $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ es normal al plano, sólo tendrá componente según Oz, que será $x\dot{y} - y\dot{x}$ y que coincidirá en valor absoluto con el módulo $|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}|$, luego tendremos:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C \qquad \text{(constante de las áreas)}$$

Pero

$$\dot{x} = A\,\omega\cos(\omega t' + \theta) \qquad\qquad \dot{y} = B\,\omega\cos\omega t'$$

Luego

$$C = A\,B\,\omega \operatorname{sen}(\omega\,t' + \theta)\cos\omega\,t' - A\,B\,\omega \operatorname{sen}\omega\,t'\cos(\omega\,t' + \theta) = \\ = A\,B\,\omega \operatorname{sen}\theta \qquad (10.16)$$

Para A, B y ω constantes, la velocidad areolar es directamente proporcional al seno de la diferencia entre las fases iniciales y será máxima si difieren en $\pi/2$ y nula si $\theta = n\,\pi$ (elipse degenerada en una recta).

Por ser central el campo de fuerzas, derivará de un potencial

$$V = -\int F\,dr + \text{const.} = \int k\,r\,dr + \text{const.} = \tfrac{1}{2}\,k\,r^2 + \text{const.}$$

y tomando $V = 0$ para $r = 0$ (cero de potenciales en el centro O), la constante es nula, quedando

$$V = \tfrac{1}{2}\,k\,r^2 = \tfrac{1}{2}\,k\,(x^2 + y^2) \qquad (10.17)$$

Como debe conservarse la energía mecánica

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + V = \text{const.}$$

es decir,

$$E = \tfrac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{2}\,k(x^2 + y^2) = \\ = \tfrac{1}{2}\,m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Para calcular este valor, bastará tomar los valores iniciales

$$E = \tfrac{1}{2}\,m[\dot{x}_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2} + \omega^2(x_0^{\,2} + y_0^{\,2})] = \tfrac{1}{2}\,m(\omega^2\,x_0^{\,2} + \dot{x}_0^{\,2} + \omega^2\,y_0^{\,2} + \dot{y}_0^{\,2})$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones 10.14 resulta

$$E = \tfrac{1}{2}\,m\,(\omega^2\,A^2 + \omega^2\,B^2) = \tfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(A^2 + B^2) = \tfrac{1}{2}\,k\,(A^2 + B^2) \qquad (10.18)$$

donde E es la energía total del sistema y vemos que no depende del desenfase $\theta = \theta_1 - \theta_2$.

Si en su posición inicial el punto se hubiese hallado sobre el eje Ox y su velocidad inicial tuviera la dirección de la fuerza, el movimiento sería un m.a.s., el potencial sería $V = k\,x^2/2$ y la energía total sería $E = m\,\omega\,A^2/2 = k\,A^2/2$, que es el valor máximo de la energía potencial. Por tanto, cuando la energía potencial es máxima, la energía cinética es nula y recíprocamente. Tendremos, pues,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m v^2 &= \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \\ V &= \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2 \omega t \\ \text{y} \qquad E &= \tfrac{1}{2} m v^2 + V = \tfrac{1}{2} m \omega^2 A^2 \end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

que es la energía del *oscilador lineal.*

10.6 Composición de movimientos armónicos perpendiculares. *a) m.a.s. perpendiculares de la misma* ω. Supongamos un punto material sometido a la acción de fuerzas que sólo tengan componentes x e y, siendo la componente según el eje Ox $X = -k x$ y sobre el eje Oy $Y = -k y$, como en el § 10.5. El resultado es la obtención de dos m.a.s. perpendiculares de la misma ω (ec. 10.13).

Podemos generalizar y aplicar lo estudiado en el § 10.5 a la composición de oscilaciones armónicas perpendiculares de ecuación análoga a las ecuaciones 10.13, sea cual fuere su origen. La trayectoria será la elipse definida por la ecuación 10.15 que el punto recorre con un período dado por la ecuación 10.12 y cuya área será $\frac{1}{2} C T = \pi A B \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)$. Esta elipse está inscrita en el rectángulo de lados $2A$ y $2B$. El sentido de recorrido de la elipse viene dado por el de la velocidad areolar y por tanto por el signo de la constante C de las áreas (ec. 10.16), la cual es positiva si $0 < \theta < \pi$, en cuyo caso se recorre en el sentido levogiro (contrario a las agujas del reloj). En el caso $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ se recorrerá en sentido dextrogiro u horario. Haciendo variar θ de 0 a 2π, destacaremos los siguientes casos particulares:

$\theta = 0$	$\dfrac{x}{A} - \dfrac{y}{B} = 0$	área nula
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$	área máxima $\pi A B$, levogiro
$\theta = \pi$	$\dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} = 0$	área nula
$\theta = \dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$	área máxima $\pi A B$, dextrogiro
$\theta = 2\pi$	igual que para $\theta = 0$	

Las trayectorias mencionadas son las representadas en la figura 10.9.

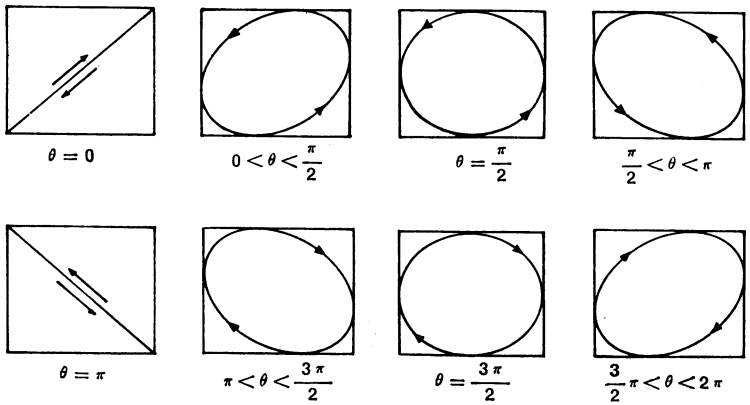


FIG. 10.9 Trayectorias resultantes de la composición de dos m.a.s. perpendiculares y de igual período.

Si las amplitudes A y B fueran iguales, la ecuación sería

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta = A^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

que es una elipse inscrita en un cuadrado de lado $2A$, la cual se convierte en la diagonal del vértice superior derecho al inferior izquierdo para $\theta = 2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Para $\theta = (2n + 1)\pi$, la trayectoria es la otra diagonal, y para $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio A que para $n = 0, 2, 4, \ldots$ es levogira y para $n = 1, 3, 5, \ldots$ es dextrogira.

El movimiento circular puede considerarse como resultante de dos m.a.s. de igual amplitud (que será el radio de la circunferencia), de igual pulsación (que será la celeridad angular) y cuya diferencia de fase $\theta = \theta_1 - \theta_2$ sea igual a un número impar de ángulos rectos. El movimiento será levogiro para 1, 5, ..., y dextrogiro para 3, 7, ...

Este tipo de composición se presenta en distintos campos de la Física, por ejemplo: en corrientes alternas sinusoidales y en luz polarizada. Para las corrientes alternas, la observación es perfecta en el osciloscopio.

b) *m.a.s. perpendiculares de pulsaciones que difieren muy poco.* Sean las ecuaciones de los dos m.a.s.

$$x = A \operatorname{sen} (\omega' t + \theta) \qquad y = B \operatorname{sen} \omega t \qquad (\omega' = \omega + \varepsilon)$$

con lo cual

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varepsilon t + \theta) = A \text{ sen } (\omega t + \theta') \qquad (\theta' = \varepsilon t + \theta)$$

operando como en el § 10.5, obtenemos

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \theta' = \text{sen}^2 \theta'$$

ecuación análoga a la 10.15, pero con la diferencia de que θ' depende del tiempo t. En el transcurso del tiempo, θ' irá variando de manera continua y el punto móvil irá pasando con continuidad de una a otra elipse sin que se cierre la trayectoria. Si es ε muy pequeño, podremos ver la elipse cómo va tomando (en el osciloscopio) todas las formas que antes se han indicado para θ constante. Si el valor de ε no fuese pequeño, el paso de una a otra elipse es brusco y no distinguiremos las elipses sucesivas. Por el contrario, la trayectoria es muy complicada, aunque siempre inscrita en el rectángulo de lados $2A$ y $2B$.

c) *Curvas de Lissajous.* Supongamos diferentes las pulsaciones, pero que su razón ω'/ω sea un número racional sencillo, es decir,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{T}{T'} = \frac{n'}{n}$$

siendo n y n' dos números enteros pequeños. Las ecuaciones del movimiento son

$$x = A \text{ sen} \left(2\pi \frac{t}{T'} + \theta \right) \qquad y = B \text{ sen } 2\pi \frac{t}{T}$$

En el instante inicial $t = 0$,

$$x_0 = A \text{ sen } \theta \qquad y_0 = 0$$

y al cabo de un tiempo $t = n\,T = n'\,T'$,

$$x = A \text{ sen } (2\pi n' + \theta) = A \text{ sen } \theta = x_0$$
$$y = B \text{ sen } 2\pi n = 0 = y_0$$

es decir, el punto móvil ha regresado a su posición inicial. El período de la trayectoria es el mínimo común múltiplo de los períodos T y T', pues la proyección horizontal regresa a su posición inicial al cabo

de un tiempo múltiplo del período T' y la vertical al cabo de un tiempo múltiplo de T. El valor mínimo del tiempo que ha de transcurrir para que coincidan es el m.c.m. de T y T'.

A las trayectorias de este tipo de movimiento se les da el nombre de *curvas de Lissajous*. Pueden dibujarse de manera muy sencilla recordando (cfr. § 10.2) la definición de un m.a.s. como proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro. Ilustrémoslo con un ejemplo:

Consideremos la composición de los dos m.a.s. perpendiculares

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \qquad y = B \operatorname{sen} 2\omega t$$

y tracemos dos circunferencias de radios respectivos A y B, tal como se indica en la figura 10.10. Los m.a.s. componentes serán las proyecciones sobre el diámetro horizontal de la primera circunferencia y sobre el vertical de la segunda de sendos puntos en movimiento circular de celeridades angulares ω y 2ω, respectivamente. Dibujemos en la primera el diámetro 1-5 que forma un ángulo θ con el diámetro vertical y dividamos en cuatro partes iguales cada uno de los semicírculos que determina el diámetro 1-5. En la otra circunferencia dividamos en dos partes iguales cada uno de los semicírculos que determina el diámetro horizontal. Obsérvese que $2:4 = T:T'$. Mientras el punto figurativo da una vuelta a la primera circunferencia, a la segunda da dos. Es decir, en tiempos iguales recorre un ángulo doble en la segunda circunferencia que en la primera. El punto 1 es el de partida en una y otra y sus proyecciones sobre los diámetros horizontal (en la primera) y vertical (en la segunda) determinan las coordenadas x e y, respectivamente, de la posición del móvil en el movimiento resultante, la cual también se ha rotulado con el número 1. Al cabo de un tiempo $T/4$, los puntos figurativos han pasado a las posiciones rotuladas con el número 2, un tiempo $T/4$ más tarde a las rotuladas 3, etc., hasta que en las posiciones 9 coinciden los tres puntos en sus posiciones 1, cerrándose así el ciclo. Se comprende que si la razón de los períodos hubiera sido $T:T' = 3:4$, los semicírculos determinados por los diámetros correspondientes a las posiciones iniciales en la primera y en la segunda circunferencias, se deberían haber dividido en 3 y 4 (o $3k$ y $4k$) partes iguales, respectivamente. El método de construcción hubiera sido el mismo.

Durante el tiempo que emplea el móvil en recorrer una vez toda la curva de Lissajous del ejemplo desarrollado (fig. 10.10), y ha pasado dos veces por sus valores extremos, dando dos tangencias en cada lado horizontal del rectángulo, mientras x sólo ha dado una. Por tanto, de una manera general, la razón entre el número de puntos

de tangencia horizontal y de puntos de tangencia vertical será igual a la razón entre las frecuencias (o pulsaciones) de los movimientos que las producen.

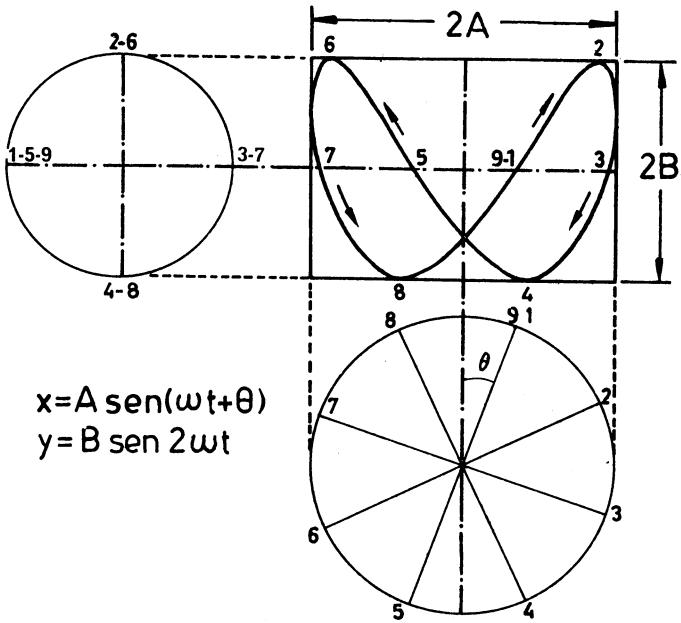
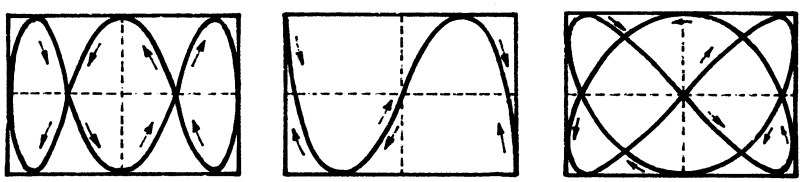


FIG. 10.10 Construcción de una curva de Lissajous.



$x = A \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
$y = B \text{ sen } 3\omega t$

$x = A \text{ sen } (\omega t + \pi)$
$y = B \text{ sen } 3\omega t$

$x = A \text{ sen } 2\omega t$
$y = B \text{ sen } 3\omega t$

FIG. 10.11 Curvas de Lissajous.

En la figura 10.11 pueden verse varias curvas de Lissajous correspondientes a diversos casos.

10.7 Composición de dos m.a.s. de la misma dirección y pulsación. Sean dos m.a.s. de ecuaciones

$$x_1 = A_1 \text{ sen } (\omega t + \theta_1) \qquad x_2 = A_2 \text{ sen } (\omega t + \theta_2)$$

que tomando un origen de tiempos conveniente, como se hizo con las ecuaciones 10.13, pueden escribirse en la forma

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \qquad x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega t \qquad \theta = \theta_1 - \theta_2$$

En el § 10.2 vimos que un m.a.s. puede considerarse como el movimiento del extremo de la proyección sobre un eje de un vector de módulo constante que teniendo fijo su origen gire con celeridad angular constante igual a la pulsación (representación de Fresnel). Pues bien: tomemos con origen común O (fig. 10.12) los vectores representativos de los dos m.a.s. formando entre ambos un ángulo igual a la diferencia de fase θ. Al girar ambos con celeridad angular ω, sus proyecciones sobre Ox darían, en cada instante, las elongaciones correspondientes a uno y otro m.a.s. La resultante de los dos vectores será un vector de módulo A que formará un cierto ángulo α con el de módulo A_2. La figura constituida por los tres vectores que giran con igual celeridad angular conservará los ángulos que forman entre sí, y como la proyección sobre el eje Ox del vector suma de los

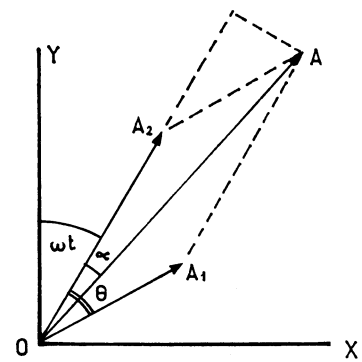


FIG. 10.12 Composición de dos m.a.s. mediante la representación de Fresnel.

dos primeros es igual a la suma de las proyecciones de éstos sobre Ox (cfr. § 1.3), la proyección del primero coincidirá en todo instante con la suma de las elongaciones x_1 y x_2. Es decir, el vector resultante tiene por módulo la amplitud del m.a.s. $x_1 + x_2$, y los ángulos que forma con los vectores representativos miden las diferencias de fase del m.a.s. resultante con los m.a.s. componentes. Es obvio que su pulsación será la misma, pues gira con la misma celeridad angular. Luego *para obtener el m.a.s. resultante de componer dos m.a.s. de igual dirección y pulsación, bastará representar éstos por sendos vectores de módulos iguales a las amplitudes respectivas y que formen un án-*

gulo igual a la diferencia de fase de los m.a.s. componentes. El vector resultante obtenido mediante la regla del paralelogramo representa en amplitud y fase al m.a.s. resultante.

Si queremos hallar las expresiones analíticas de la amplitud y de la diferencia de fase del m.a.s. resultante con relación a los componentes podremos aplicar primeramente el teorema del coseno al triángulo formado por los vectores representativos (fig. 10.12) y tenemos

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \theta}$$

que nos da la expresión de la amplitud del m.a.s. resultante.

Para hallar la diferencia de fase α existente entre el m.a.s. resultante y el $x_2 = A_2 \operatorname{sen} (\omega t + \theta_2)$ proyectaremos sobre la dirección del vector representativo de éste el vector de módulo A, con lo que obtenemos

$$A \cos \alpha = A_2 + A_1 \cos \theta$$

y proyectándolo sobre una dirección perpendicular a la anterior

$$A \operatorname{sen} \alpha = A_1 \operatorname{sen} \theta$$

y dividiendo estas dos últimas ecuaciones tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \theta}{A_2 + A_1 \cos \theta}$$

y la ecuación del movimiento resultante es

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$$

Resulta inmediato que si

$$\theta = 2 n \pi \qquad A = A_1 + A_2$$

$$\theta = (2 n + 1) \pi \qquad A = |A_1 - A_2|$$

$$\theta = (2 n + 1) \frac{\pi}{2} \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

siendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

10.8 Oscilaciones amortiguadas. Al estudiar las oscilaciones de un péndulo o de una masa unida a un resorte, no se tuvo en cuenta la resistencia del medio. Esta resistencia se manifiesta por fuerzas que amortiguan las oscilaciones, es decir, que hacen disminuir la amplitud de éstas en el transcurso del tiempo.

Antes de iniciar el estudio de las oscilaciones amortiguadas, vamos a considerar un caso sencillo: Supongamos un movimiento inercial en el cual se mueva un punto de masa m a lo largo del eje Ox. Si se halla sometido a una fuerza resistiva proporcional a su celeridad, como la que experimenta un cuerpo que se mueve en un fluido a celeridad no muy grande (cfr. § 14.9), la ecuación del movimiento será

$$m\,\ddot{x} = F = -R\,\dot{x}$$

siendo R una constante de proporcionalidad cuyas dimensiones son $M\,L\,T^{-2}/L\,T^{-1} = M\,T^{-1}$. La ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} = 0 \tag{10.20}$$

las dimensiones de R/m son T^{-1}, por lo que suele hacerse

$$\frac{R}{m} = \frac{1}{\tau}$$

τ es una magnitud con las dimensiones de tiempo la cual recibe el nombre de *tiempo de relajación.*

Si llamamos v a la celeridad $\dot{x}$, la ecuación 10.20 puede escribirse, teniendo en cuenta que $\ddot{x} = \dot{v}$:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}dt$$

la cual se integra, obteniendo

$$\ln v = -\frac{1}{\tau}t + \text{const.}$$

para $t = 0$, $v = v_0$ y por tanto $\ln v_0 = \text{const.}$, luego

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau}t \qquad \text{de donde} \qquad v = v_0\,e^{-t/\tau}$$

Al cabo de un tiempo $t = \tau$, $v = v_0/e$; el tiempo de relajación es igual al tiempo necesario para que la celeridad se reduzca a $1/e$ de su valor inicial. Vemos, pues, que la celeridad disminuye exponencialmente con el tiempo, lo que también suele expresarse diciendo que la celeridad está amortiguada con una *constante de tiempo* τ.

Podemos pasar ya a estudiar el *m.a.s. amortiguado,* es decir, el movimiento de una masa m sobre la que se ejercen fuerzas resistivas proporcionales a la celeridad ($-R\dot{x}$) además de una fuerza recuperadora $-kx$ de igual índole que la que intervenía en el m.a.s. no amortiguado. La ecuación del movimiento será, pues,

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x} \qquad \text{o sea} \qquad m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = 0$$

lo cual equivale a

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{10.21}$$

En esta ecuación, si es R tan pequeño que podamos despreciar R/m frente a los demás términos, tendremos un m.a.s. del tipo considerado anteriormente (ec. 10.1). En cambio, si k fuese nula tendríamos el movimiento inercial amortiguado que acabamos de ver. En el caso general, tendremos un m.a.s. amortiguado. Su celeridad disminuye exponencialmente con el tiempo y podemos presumir que lo mismo le ocurrirá a la amplitud. Esto nos lleva a pensar que la ecuación 10.21 admita una solución del tipo

$$x = A_0\, e^{-bt} \operatorname{sen}\ (\omega t + \theta_0)$$

que si tomamos el origen de tiempos $t = 0$ en el instante en que $x = A_0$ (amplitud inicial máxima) $\theta_0 = 90°$ y la ecuación que suponemos pueda ser solución de la ecuación 10.21 quedaría en la forma

$$x = A_0\, e^{-bt} \cos\ \omega t \tag{10.22}$$

Para ver si, efectivamente, es solución de la ecuación 10.21 sustituiremos en ésta el valor de x dado por la ecuación 10.22 y los de $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ que se deducen derivando esta última ecuación respecto al tiempo, es decir,

$$\dot{x} = A_0\, e^{-bt}\ (-\omega \operatorname{sen} \omega t - b \cos \omega t)$$
$$\ddot{x} = A_0\, e^{-bt}\ [(b^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\, b\, \omega \operatorname{sen} \omega t]$$

Realizando la sustitución mencionada obtenemos:

$$A_0\, e^{-bt} \Big[(b^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\, b\, \omega \operatorname{sen}\ \omega t - \frac{R}{m}\omega \operatorname{sen}\ \omega t - \frac{R}{m} b \cos\ \omega t + \frac{k}{m} \cos\ \omega t \Big] = 0$$

y como el factor común no puede anularse, dividiremos por él ambos miembros y tras reagrupar términos queda

$$\left(b^2 - \omega^2 - \frac{R}{m} b + \frac{k}{m} \right) \cos \omega t + \left(2 b \omega - \frac{R}{m} \omega \right) \operatorname{sen} \omega t = 0$$

que debe satisfacerse para todos los valores de t. Luego, haciendo $t = 0$, será sen $\omega t = 0$ y cos $\omega t = 1$, lo cual exige que

$$b^2 - \omega^2 - \frac{R}{m} b + \frac{k}{m} = 0 \qquad (10.23)$$

para $t = \pi/2\omega$, sen $\omega t = 1$ y cos $\omega t = 0$ y deberá cumplirse

$$2 b \omega - \frac{R}{m} \omega = 0 \qquad \text{de donde} \qquad b = \frac{R}{2m} \qquad (10.24)$$

quiere esto decir que la ecuación 10.22 será solución de la ecuación 10.21 solamente si b y ω tienen valores que satisfagan las ecuaciones 10.23 y 10.24.

Examinando la ecuación 10.22 observamos que la constante de tiempo será $(1/b)$ y la ecuación 10.24 nos enseña que su valor es el doble del que tiene para el movimiento inercial amortiguado. Sustituyendo la ecuación 10.24 en la 10.23 encontramos

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{R^2}{4m^2} \qquad (10.25)$$

siendo $k/m = \omega_0^2$ el cuadrado de la pulsación del m.a.s. sin amortiguamiento (cfr. § 10.1). Podemos, pues, escribir

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{4 m^2 \omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \tau \omega_0} \right)^2} \qquad (10.26)$$

pues $\tau = m/R$. Luego, si es R pequeño y ω_0 grande, se cumple prácticamente $\omega = \omega_0$.

Para valores de R no despreciables, ω es diferente de ω_0 pero se mantiene constante en el movimiento. El período es el de la función coseno, $T = 2\pi/\omega$. Llamando

$$A = A_0 e^{-bt}$$

el movimiento puede considerarse como oscilatorio de amplitud A, es decir,

$$x = A_0\, e^{-bt} \cos\, \omega\, t = A \cos\, \omega\, t$$

lo que se interpreta diciendo que el amortiguamiento afecta a la amplitud, manteniéndose constante el período. Téngase en cuenta que ahora el período representa el intervalo de tiempo transcurrido para que el punto se halle en la misma fase después de una oscilación, prescindiendo de que la amplitud sea menor, lo mismo que la

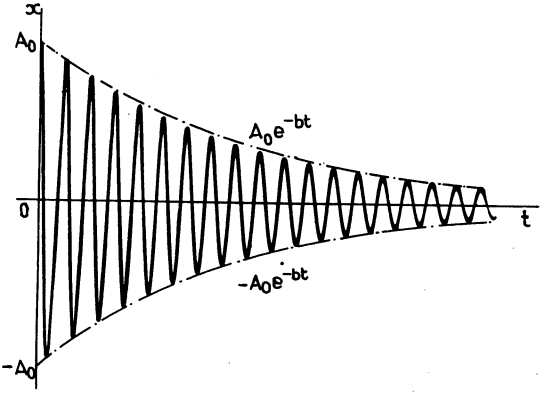


FIG. 10.13 Movimiento armónico amortiguado.

velocidad y la aceleración. En la figura 10.13 representamos el movimiento amortiguado. Vemos que A disminuye exponencialmente y los puntos representativos de la amplitud están contenidos en las exponenciales

$$x = A_0\, e^{-bt} \qquad \text{y} \qquad x = -A_0\, e^{-bt}$$

El amortiguamiento depende exclusivamente de $b = R/2\,m$, cantidad que lleva el nombre de *factor de amortiguamiento* y, en definitiva, de R.

Podemos determinar experimentalmente este valor b: Sean x_m y x'_m dos máximos consecutivos, o sea

$$x_m = A_0\, e^{-bt} \qquad x'_m = A_0\, e^{-b(t+T)} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{x_m}{x'_m} = e^{bT}$$

y tomando logaritmos neperianos

$$\ln \frac{x_m}{x'_m} = bT \qquad \text{de donde} \qquad b = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{x_m}{x'_m} \right)$$

midiendo x_m y x'_m y determinando T con un cronómetro hallamos b, magnitud difícil de obtener directamente.

La resistencia disipa energía en forma de calor. En el estado inicial, si partimos de la elongación máxima A_0, toda la energía es potencial. Al iniciarse el movimiento, se va originando energía cinética al tiempo que se va perdiendo energía que se transforma en calor. La energía perdida es tanto mayor cuanto mayor sea R. Si vamos aumentando gradualmente R, aumenta el amortiguamiento, se disipa mayor energía y ω disminuye. De esta manera llegaremos a un valor de R para el cual toda la energía se habrá disipado entre la posición inicial

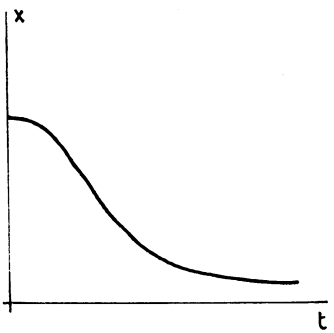


FIG. 10.14 Movimiento aperiódico.

y la de equilibrio, por lo que en ésta la energía cinética será nula y el móvil no la rebasa. Toda la energía se ha disipado, por efecto de la resistencia, desde la posición de energía potencial máxima a la de energía potencial nula. El valor de R que da lugar a este amortiguamiento, llamado *amortiguamiento crítico*, hace que ω sea nula, o sea que haciendo $\omega = 0$ en la ecuación 10.25 resulta el valor crítico $R = 2\sqrt{k\,m}$. Para todo valor $R \geqslant 2\sqrt{k\,m}$, el amortiguamiento es tal que no hay oscilación. El movimiento se llama aperiódico y lo hemos representado en la figura 10.14. La curva tenderá tanto más rápidamente hacia el eje de abscisas cuanto mayor sea R. La elongación es función exponencial negativa sin función sinusoidal del tiempo que la multiplique.

Por último, podemos considerar el m.a.s. angular amortiguado. Si sobre un m.a.s. angular se ejerce, además de las fuerzas consideradas en el § 10.4, fuerzas resistivas cuyo momento resultante respecto al eje de rotación sea proporcional a la celeridad angular y que representaremos por $-M\,\theta$, la ecuación diferencial del movimiento será

$$I\ddot{\theta} = -C\theta - M\dot{\theta} \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{\theta} + \frac{M}{I}\dot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0$$

Por analogía con la ecuación 10.21, la solución será del tipo

$$\theta = \Phi e^{-bt} \cos \omega t$$

donde

$$b = \frac{M}{2I} \qquad \omega = \sqrt{\frac{C}{I} - \frac{M^2}{4I^2}}$$

y Φ es la amplitud angular inicial. La amplitud angular se va amortiguando, como en el caso anterior, y podemos aplicar aquí todo lo dicho entonces.

Este tipo de movimiento se encuentra en el movimiento real de un péndulo físico, en el galvanómetro, algunos aparatos de medida eléctricos, balanzas amortiguadas, etc.

10.9 Oscilaciones forzadas. El movimiento oscilatorio amortiguado que acabamos de estudiar se debe a fuerzas elásticas y a las de resistencia del medio, sin que intervengan fuerzas activas exteriores al sistema. Las oscilaciones se efectúan con un período $T = 2\pi/\omega$ constante y por lo tanto con una frecuencia constante $f = 1/T$ llamada *frecuencia propia* que depende (cfr. ec. 10.25) de las constantes elásticas, de la masa y de la resistencia. Si ésta fuese pequeña, $\omega \simeq \sqrt{k/m} = \omega_0$ y la pulsación sería la del m.a.s. no amortiguado. Cuando la resistencia es apreciable, el movimiento se va amortiguando y, al cabo de cierto tiempo, prácticamente habrá desaparecido.

Supongamos que sobre el sistema que oscila con amortiguamiento se ejerza una fuerza periódica $F(t)$, armónica en el tiempo, que podemos expresar por $F_0 \cos \Omega t$, de la misma dirección que el movimiento. Dado que, al cabo de cierto tiempo, podemos prescindir del movimiento natural del sistema, éste oscilará a la misma frecuencia que la fuerza impulsora y por ello a las oscilaciones se les da el nombre de *forzadas*. Cuando ocurre esto último, se dice que el movimiento es estacionario, mientras que en el intervalo de tiempo en que aún no puede despreciarse el movimiento natural del sistema se dice que el movimiento es transitorio.

Para materializar el anterior tipo de movimiento podemos considerar el sistema constituido por un resorte que tiene un extremo fijo y el otro unido a un cuerpo de masa m, el cual, a su vez, está sujeto al extremo de un vástago solidario al émbolo de un amortiguador

(fig. 10.15). Al cuerpo de masa m se le aplica una fuerza horizontal $F = F_0 \cos \Omega t$, donde Ω es diferente de la pulsación ω del movimiento natural de la masa con el muelle. La respuesta del sistema a la fuerza impulsora puede darse por la elongación x o por la celeridad $\dot{x}$. De

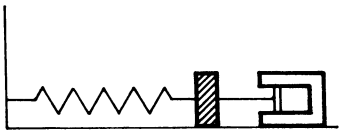


FIG. 10.15 Oscilaciones forzadas con amortiguamiento.

momento, consideremos la x. La ecuación del movimiento contendrá ahora a la fuerza impulsiva y puede escribirse en la forma

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

o bien

$$m\ddot{x} + R\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \qquad (10.27)$$

Vamos a ver que, prescindiendo del movimiento transitorio, es decir, cuando se ha alcanzado el estado estacionario, la solución de la ecuación 10.27 es del tipo

$$x = A \operatorname{sen} (\Omega t - \theta) \qquad (10.28)$$

donde A es la amplitud de las oscilaciones y θ la diferencia de fase existente entre éstas y la fuerza impulsora. Notemos que θ tiene aquí un significado diferente del de θ_0 en el m.a.s. no amortiguado (ecuación 10.2). Allí era la fase inicial, relacionada con las condiciones iniciales. Ahora, considerando el estado estacionario, no tiene nada que ver con las condiciones iniciales. Según veremos, depende de Ω, m, k y R, o sea de los parámetros determinantes del movimiento, exceptuando F_0.

Para ensayar si la ecuación 10.28 es solución de la ecuación 10.27, derivaremos dos veces aquélla respecto al tiempo y sustituiremos en esta última. Del resultado obtenido deduciremos si efectivamente es solución, y en tal caso veremos qué valores deben tener A y θ. Así pues

$$\dot{x} = A\Omega \cos (\Omega t - \theta) \qquad (10.29)$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \operatorname{sen} (\Omega t - \theta) \qquad (10.30)$$

y al sustituir en la ecuación 10.27 las ecuaciones 10.28, 10.29 y 10.30 y reducir términos semejantes queda:

$$A(k - m\Omega^2) \operatorname{sen} (\Omega t - \theta) + A R \Omega \cos (\Omega t - \theta) = F_0 \cos \Omega t \qquad (10.31)$$

que debe satisfacerse para cualquier valor de t. Luego, dando a t un valor tal que $\Omega t - \theta = \pi/2$ tendríamos

$$\operatorname{sen} (\Omega t - \theta) = 1 \qquad \cos (\Omega t - \theta) = 0 \qquad \cos \Omega t = -\operatorname{sen} \theta$$

y sustituyendo estos valores en la ecuación 10.31 obtenemos

$$A(k - m\Omega^2) = -F_0 \operatorname{sen} \theta \qquad (10.32)$$

Para $t = \theta/\Omega$, $\Omega t - \theta = 0$, sen $(\Omega t - \theta) = 0$ y cos $(\Omega t - \theta) = 1$ y para este valor de t la ecuación 10.31 da

$$R A \Omega = F_0 \cos \theta \qquad (10.33)$$

y dividiendo las ecuaciones 10.33 y 10.32 resulta

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m\Omega^2 - k}{R\Omega} \qquad (10.34)$$

elevando al cuadrado las ecuaciones 10.32 y 10.33 y sumando hallamos

$$A^2 [(k - m\Omega^2)^2 + R^2 \Omega^2] = F_0^2$$

y despejando A,

$$A = \frac{F_0}{[(m\Omega^2 - k)^2 + R^2 \Omega^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (10.35)$$

si al denominador le llamamos D, sustituyendo la ecuación 10.35 en la 10.28 será

$$x = \frac{F_0}{D} \operatorname{sen} (\Omega t - \theta) \quad \text{donde} \quad \theta = \operatorname{arc\ tg} \frac{m\Omega^2 - k}{R\Omega} \qquad (10.36)$$

Si R fuese muy grande (movimiento natural aperiódico), el valor de θ es casi nulo cualquiera que sea Ω. La fuerza y la elongación x están defasadas 90°, ya que en este caso x es proporcional a sen Ωt y F a cos Ωt. Si $R = 0$, tg $\theta = \pm\infty$ y $\theta = \pm 90°$ (+ cuando $m\Omega^2 > k$ y — si $m\Omega^2 < k$). En el caso $\theta = +90°$, la fuerza y la elongación están en oposición de fase y si $\theta = -90°$ están en concordancia de fase. En general, si

$$m\Omega^2 - k > 0 \qquad \theta > 0$$

$$m\Omega^2 - k < 0 \qquad \theta < 0$$

10.10 Resonancia. Vamos a considerar que la respuesta del sistema es la celeridad $\dot{x}$. Derivando respecto al tiempo la primera de las ecuaciones 10.36 tenemos

$$\dot{x} = \frac{F_0}{D}\Omega \cos\ (\Omega t - \theta) \tag{10.37}$$

Haciendo $Z = D/\Omega$, cantidad que llamaremos *impedancia mecánica* del sistema, la ecuación 10.37 puede escribirse en la forma

$$\dot{x} = \frac{F_0}{Z}\cos\ (\Omega t - \theta) = v_0 \cos\ (\Omega t - \theta) \tag{10.38}$$

donde $v_0 = F_0/Z$ es la amplitud de la celeridad, que es su valor máximo en un período. Vamos a estudiar la impedancia mecánica

$$Z = \frac{D}{\Omega} = \sqrt{R^2 + \left(m\Omega - \frac{k}{\Omega}\right)^2} \tag{10.39}$$

la cual puede representarse (fig. 10.16) geométricamente como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean R y $m\Omega - (k/\Omega)$. El ángulo que forma Z con R es θ, según se deduce de la segunda de las ecuaciones 10.36.

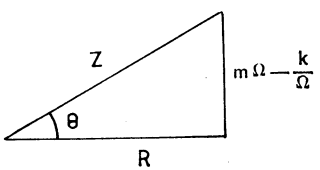


FIG. 10.16 Construcción geométrica de la impedancia mecánica.

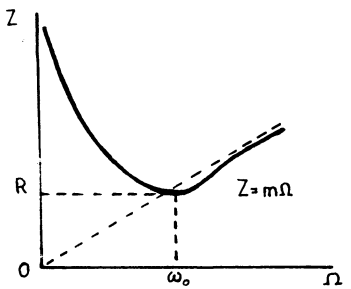


FIG. 10.17 Gráfica de la impedancia mecánica en función de la pulsación.

La amplitud A, el desfase θ y la amplitud de la celeridad v_0 varían con Ω. Comenzaremos estudiando la variación de la impedancia Z con la pulsación. Para valores pequeños de Ω predomina el término k/Ω y la variación es hiperbólica, teniendo por asíntota el eje de impedancias (fig. 10.17). En cambio, para valores grandes de Ω predomina el término $m\Omega$ y la gráfica tiende asintóticamente a la

recta $Z = m\,\Omega$. Cuando $\Omega = \sqrt{k/m} = \omega_0$, $Z = R$, que es su valor mínimo, y la amplitud de la celeridad alcanzará su valor máximo F_0/R. En este caso se dice que hay *resonancia*. Si R fuese muy pequeña, v_0 se haría muy grande y la resonancia se llama *catastrófica* (si $R = 0$, $v_0 = \infty$). Se comprende que al alcanzar velocidades demasiado grandes los elementos de una construcción, éstos se rompan. De aquí el calificativo de dicha resonancia, la cual deberá evitarse en los elementos de máquinas sometidas a esfuerzos periódicos.

La resonancia, pues, se alcanza cuando la fuerza impulsora tiene una frecuencia coincidente con la frecuencia propia de vibración del sistema sin amortiguamiento. En tal caso $\theta = 0$ y la celeridad vale

$$\dot{x} = \frac{F_0}{R} \cos\, \omega_0\, t$$

Para la amplitud A de la elongación, su valor máximo no se produce a $\Omega = \omega_0$; el máximo de A se tiene para la pulsación

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{R^2}{2\,m^2}}$$

Las gráficas de la figura 10.18 representan las variaciones de A, θ y v_0 en función de Ω. Las gráficas rotuladas con (1) corresponden a $R = 0$, con (2) a R de valor pequeño y con (3) a R de valor grande. Puede observarse que la resonancia es tanto más *aguda* cuanto menor sea R; si $R = 0$, la amplitud tiende a infinito cuando Ω tiende a la pulsación de resonancia.

En la figura 10.18 *a* vemos que para $R = 0$ el máximo lo tenemos para $\Omega = \omega_0$ y que se desplaza hacia la izquierda al aumentar R, al tiempo que disminuye el valor de dicho máximo. En la figura 10.18 *b*

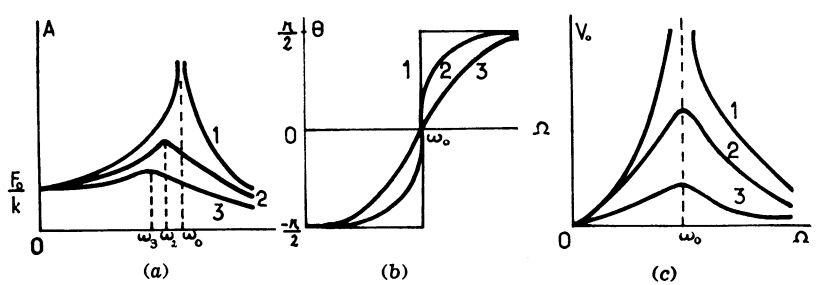


FIG. 10.18 (*a*) Amplitud de la elongación. (*b*) Diferencia de fase entre la velocidad y la fuerza impulsora. (*c*) Amplitud de la velocidad. Las tres magnitudes están representadas en función de la pulsación de la fuerza impulsora.

se observa que para $R = 0$ el ángulo θ pasa bruscamente de su valor constante $-\pi/2$ a $+\pi/2$ en el punto de resonancia.

10.11 Potencia disipada en las oscilaciones forzadas. Siendo estacionarias las oscilaciones forzadas, la potencia suministrada por la fuerza impulsora se disipa en forma de calor por efecto de las resistencias pasivas amortiguadoras. Vamos a calcular la potencia media disipada en un período.

Llamando P a la potencia desarrollada en el instante t, la potencia media durante un período T será

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt$$

y como (cfr. § 7.7)

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

en nuestro caso tendremos, por ser de igual dirección $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$,

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T (F_0 \cos\,\Omega t)\, v_0 \cos\,(\Omega t - \theta)\,dt$$

que desarrollada queda

$$\overline{P} = \frac{1}{T} F_0 v_0 \left[\int_0^T \cos^2\Omega t \cos\theta\,dt + \int_0^T \cos\Omega t \operatorname{sen}\Omega t \operatorname{sen}\theta\,dt\right]$$

Como $\Omega T = 2\pi$, la segunda integral es nula y la primera vale $(T/2)\cos\theta$ y por tanto queda

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} F_0 v_0 \cos\theta$$

y como

$$\cos\theta = \frac{R}{Z}$$

según se deduce de la figura 10.16, tendremos

$$\overline{P} = \frac{F_0 R v_0}{2Z} = \frac{1}{2} R v_0^2$$

pues $F_0/Z = v_0$.

En la resonancia, $\cos\theta = 1$ y la potencia media alcanza su valor máximo

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} F_0 v_0$$

11

Movimiento ondulatorio

Según vimos en el capítulo 9, un cuerpo puede considerarse constituido por partículas entre las cuales se ejercen fuerzas de interacción a las que, macroscópicamente, podemos llamar elásticas. Si uno de los elementos del medio se desplaza de su posición de equilibrio, o se perturba, las fuerzas elásticas actúan sobre las partículas inmediatas perturbándolas, éstas perturbarán a las más próximas y así sucesivamente. Una perturbación en un punto del medio se propaga a los restantes, aunque no de manera inmediata; las partículas más alejadas iniciarán su desplazamiento con cierto retraso respecto al inicial. La perturbación se propagará con celeridad finita cuyo valor dependerá de la estructura del medio.

Podemos idealizar un modelo unidimensional considerando esferas materiales unidas entre sí por resortes elásticos (fig. 11.1). Al desplazar una de ellas de su posición de equilibrio, las restantes se irán desplazando sucesivamente.

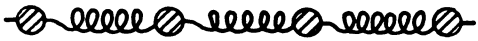


FIG. 11.1 Modelo unidimensional ideal para representar las condiciones de propagación de una perturbación por un medio elástico.

En el caso general, la perturbación se propaga en todas direcciones y constituye una onda de perturbación. En nuestro caso será una onda elástica. La perturbación en el medio puede ser de otro tipo y la onda recibe el nombre de la magnitud física que varía; por ejemplo: térmica, luminosa, etc.

Hay que señalar que la propagación de la onda no implica traslación de materia. Lo único que se transmite es movimiento o energía.

La propagación mencionada constituye el llamado *movimiento ondulatorio* y las ondas (conjunto de puntos con igual perturbación en

un mismo instante) pueden ser longitudinales o transversales, según que la dirección de propagación sea igual o perpendicular, respectivamente, a la dirección de la perturbación.

11.1 Movimiento ondulatorio armónico. Si consideramos un medio elástico, la fuerza elástica será proporcional al desplazamiento y tiende a restituir el punto a su posición inicial (ley de Hooke). Pero sabemos que una fuerza proporcional al desplazamiento y de sentido contrario da origen a un m.a.s.* y la perturbación será una vibración armónica, pudiéndose representar la elongación de una partícula por la ecuación

$$y = A \operatorname{sen} (\omega t - \theta)$$

dependiendo la fase inicial θ del instante que se tome como origen de tiempos.

Si medimos el tiempo a partir del instante en que empieza a vibrar la partícula situada en el origen de coordenadas, la ecuación del movimiento de dicha partícula será

$$y = A \operatorname{sen} \omega t$$

Un punto P situado a la distancia x del origen empezará a vibrar al cabo de un tiempo t'. Al cociente $v = x/t'$ se le da el nombre de *celeridad de propagación* de la onda, que supondremos constante. Si medimos el tiempo a partir del instante t', la ecuación que describe la vibración del punto P sería $y = A \operatorname{sen} \omega t$, pero si lo medimos a partir del instante inicial considerado anteriormente, la ecuación será

$$y = A \operatorname{sen} \omega (t - t') = A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \qquad (11.1)$$

Si es constante la celeridad de propagación y de igual valor para todos los puntos y direcciones del medio, lo cual ocurre si éste es homogéneo e isótropo, todos los puntos cuya distancia x al origen sea la misma estarán en el mismo estado vibratorio. El lugar geométrico de los puntos que, en un instante dado, están en el mismo estado vibratorio recibe el nombre de *superficie de onda*. En el caso que estamos considerando, dicho lugar geométrico está caracterizado por la condición $x =$ constante y la superficie de onda será una superficie esférica de radio x. La distancia entre dos superficies de onda con-

* El caso de movimientos periódicos más complicados puede considerarse como superposición de m.a.s., según veremos en Acústica.

secutivas que, en un instante cualquiera, se encuentren en un mismo estado vibratorio (fig. 11.2) recibe el nombre de *longitud de onda.* Se representa por λ y es el período espacial de la ecuación 11.1, que es doblemente periódica, en el espacio y en el tiempo. Para hallar λ,

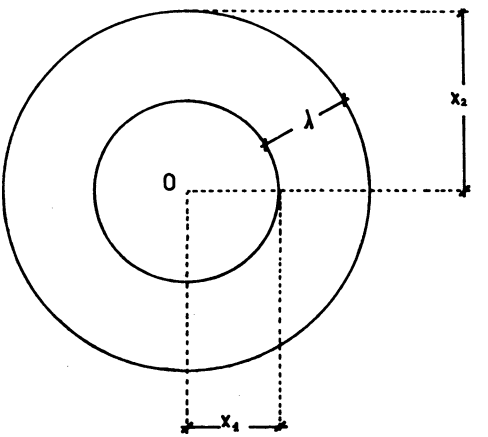


FIG. 11.2 Longitud de onda.

consideremos la superficie de onda que en el instante t tiene por radio x_1 y la que, en el mismo instante, tiene por radio x_2. Si están en el mismo estado vibratorio y son consecutivas, los ángulos de fase deben diferir en 2π. Luego

$$\omega\left(t-\frac{x_1}{v}\right)-\omega\left(t-\frac{x_2}{v}\right)=2\pi$$

de donde

$$\frac{x_2-x_1}{v}=\frac{2\pi}{\omega}=T$$

pero, por definición, $x_2-x_1=\lambda$, luego

$$\lambda=v\,T \tag{11.2}$$

de donde se desprende que la longitud de onda representa el camino recorrido por la onda en un período. Téngase en cuenta que el período, o la frecuencia, de la onda depende solamente de la vibración del foco perturbador, pero la celeridad de propagación depende del

medio y la longitud de onda dependerá, en virtud de la ecuación 11.2, de ambas cosas. Podremos, pues, escribir la ecuación 11.1 en la forma

$$y = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv} \right) = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \qquad (11.3)$$

Esta última expresión pone bien de manifiesto la doble periodicidad de la función de onda, pues λ hace respecto al espacio lo mismo que T respecto al tiempo.

Cuando la onda se halla alejada del origen o foco O y si tomamos una porción reducida de su superficie, podemos considerar en lugar de la superficie esférica su plano tangente y la superficie de onda será plana (fig. 11.3). Estas ondas, llamadas planas, simplifican el estudio de su propagación en los medios homogéneos e isótropos. La distancia x es la distancia del origen al plano. Todos los puntos con la misma x están situados en un plano normal al eje Ox. Si en la ecuación 11.3 y tiene la dirección de propagación, la onda es *longitudinal,* y si su dirección es perpendicular a Ox, la onda es *transversal.* Si en una onda transversal la elongación tiene dirección constante, se dice que está *polarizada.* Si no es así, la elongación tiene carácter vectorial.

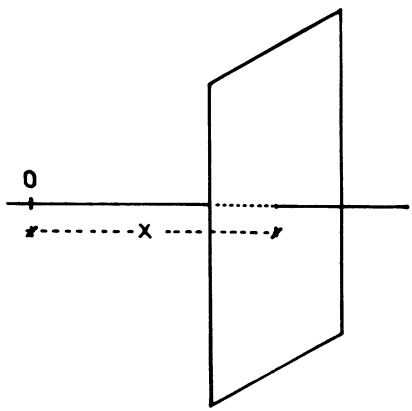


FIG. 11.3 Onda plana.

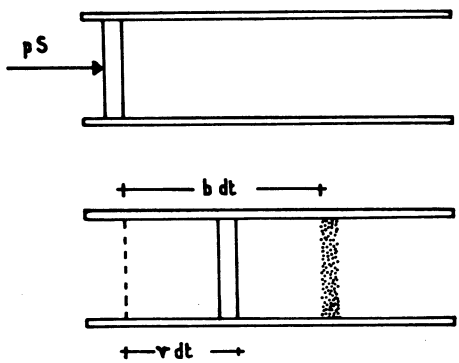


FIG. 11.4 Propagación de una onda longitudinal por un fluido contenido en un tubo.

11.2 Celeridad de propagación de una onda longitudinal. Las ondas longitudinales pueden propagarse por los sólidos y por los fluidos. Vamos a considerar la propagación en un fluido.

Sea un tubo cilíndrico lleno de un fluido (líquido o gas) de densidad ρ y a la presión p (fig. 11.4). Representemos por S el área de la sección recta

del tubo. El fluido se halla inicialmente en reposo y vamos a producir una perturbación con un émbolo situado en un extremo del tubo (el cual se considera muy largo). Se inicia el movimiento desplazando el émbolo con la celeridad v. La perturbación se propaga en el fluido con la celeridad b. Si medimos el tiempo a partir del instante de iniciar el desplazamiento del émbolo, al cabo de un tiempo dt el émbolo ocupa una posición distante $v\,dt$ del origen y la perturbación ha avanzado la distancia $b\,dt$. La cantidad de fluido que se ha puesto en movimiento transcurrido el tiempo dt es la que ocupaba inicialmente el volumen $S\,b\,dt$, cuya masa es $\rho S\,b\,dt$. Esta masa se desplaza a la velocidad del émbolo, por lo que su cantidad de movimiento será $\rho S\,b\,v\,dt$. Por la acción del émbolo, el fluido se ha comprimido. La disminución del volumen ha sido $S\,v\,dt$ y la disminución unitaria será

$$-\frac{\Delta V}{V}=\frac{S\,v\,dt}{S\,b\,dt}=\frac{v}{b} \tag{11.4}$$

La presión neta que ha efectuado esta compresión vale

$$\Delta p=\chi\left(-\frac{\Delta V}{V}\right)=\chi\frac{v}{b} \tag{11.5}$$

donde χ es el módulo de elasticidad cúbica (cfr. § 9.5), que en el caso de fluidos recibe el nombre de *módulo de compresibilidad*. La fuerza correspondiente será $(\Delta p)\,S$ y su impulso valdrá

$$(\Delta p)\,S\,dt=\chi\frac{v}{b}S\,dt$$

Igualando este impulso con la variación de la cantidad de movimiento (que por haber partido del reposo coincide con $\rho S\,b\,v\,dt$) tenemos:

$$\chi\frac{v}{b}S\,dt=\rho S\,b\,v\,dt$$

de donde

$$b^2=\frac{\chi}{\rho}\qquad \text{o sea}\qquad b=\sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \tag{11.6}$$

Podemos comprobar que esta ecuación es correcta dimensionalmente recordando que las dimensiones de χ son $M\,L\,T^{-2}/L^3$ y las de ρ son $M\,L^{-3}$, con lo cual las de b son $[L^3\,T^{-2}]^{1/2}=L\,T^{-1}$, que son las de una celeridad. Así pues, la celeridad de propagación b de las ondas en los fluidos sólo depende de su densidad y de su módulo de compresibilidad.

Si el medio fuera sólido, puede demostrarse que la celeridad de propagación de las ondas longitudinales es

$$b=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{11.7}$$

donde E es el módulo de Young del medio material y ρ su densidad.

11.3 Celeridad de propagación de una onda transversal. Puede demostrarse que, en un medio indefinido, la celeridad de propagación de las ondas transversales es

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{11.8}$$

siendo G el módulo de rigidez. De esta ecuación se deduce que por los fluidos perfectos no pueden propagarse las ondas transversales, pues es nula su rigidez.

En un medio limitado, la celeridad no sería ya la dada por la ecuación 11.8. Vamos a determinar la celeridad de propagación de una onda transversal en una cuerda.

Sea una cuerda uniforme, perfectamente flexible, a la cual tensamos con una fuerza F de módulo constante. A la masa por unidad de longitud de la cuerda (densidad lineal) la designaremos por

$$\delta = \frac{m}{l}$$

Supongamos la cuerda inicialmente horizontal y en reposo. Comunicamos a un extremo de un fragmento de la misma una velocidad v dirigida hacia arriba perpendicularmente a la cuerda (fig. 11.5). En ésta se origina una perturbación transversal que se propaga a lo largo de ella. En este caso, la fuerza recuperadora que hace posible la perturbación transversal la proporciona la propia tensión.

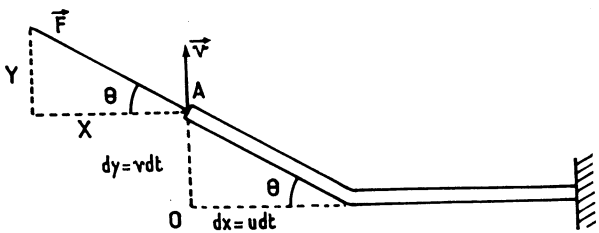


FIG. 11.5 Fragmento de cuerda en el que se origina un pulso ondulatorio.

Midiendo el tiempo a partir del inicio de la perturbación, al cabo de un tiempo dt el extremo considerado se habrá desplazado transversalmente una distancia $dy = v\,dt$ y durante ese tiempo la perturbación habrá alcanzado el punto *B*. Es decir, los puntos a la izquierda de *B* se mueven con velocidad v, mientras que los que están a la derecha se hallan aún en reposo. La perturbación se propaga a celeridad constante *u*, por lo que $dx = u\,dt$, siendo dx la distancia de *B* a la posición inicial de *A*, o sea *O* (fig. 11.5). La masa que entra en movimiento durante el tiempo dt es

$$dm = \delta\,dl \simeq \delta\,dx$$

pudiéndose hacer esta aproximación si es pequeño el ángulo. La variación de la cantidad de movimiento transversal será, pues, aproximadamente,

$$v\,dm = v\,\delta\,dx$$

El impulso transversal vale

$$Y\,dt = F \operatorname{sen}\theta\,dt \qquad F \operatorname{tg}\theta\,dt = F\frac{v}{u}dt$$

e igualándolo con la variación de cantidad de movimiento tranvsersal

$$F\frac{v}{u}dt = v\,\delta\,dx = v\,\delta\,u\,dt$$

de donde

$$\frac{F}{u} = \delta\,u \qquad \text{o sea} \qquad u^2 = \frac{F}{\delta}$$

y por tanto

$$u = \sqrt{\frac{F}{\delta}} \tag{11.9}$$

de donde deducimos que la celeridad de propagación u no depende de la velocidad de vibración v, sino solamente de la tensión F de la cuerda y de su densidad lineal. Expresando F en newton y δ en kg/m en la ecuación 11.9 tendremos la celeridad de propagación en m/s.

11.4 Intensidad de un movimiento ondulatorio. Al propagarse las vibraciones se propaga energía. Si el medio es homogéneo e isótropo, la celeridad de propagación de esta energía es la misma en todas direcciones. Tomando dos superficies esféricas muy próximas, separadas una distancia dr, todas las partículas que vibran en esta capa lo hacen con la misma energía, dada por la última de las ecuaciones 10.19, y siendo $dm = \rho\,(4\,\pi\,r^2\,dr)$ la masa total de las partículas contenidas en dicha capa, la energía de vibración de todas ellas será

$$dE = \tfrac{1}{2}\,dm\,\omega^2\,A^2 = 2\,\pi\,\rho\,r^2\,\omega^2\,A^2\,dr$$

toda esta energía atraviesa la superficie esférica de radio r en un tiempo dt, lo que representa un flujo de potencia

$$P = \frac{dE}{dt} = 2\,\pi\,\rho\,r^2\,\omega^2\,A^2\frac{dr}{dt} = 2\,\pi\,\rho\,r^2\,\omega^2\,A^2\,v \tag{11.10}$$

donde v es la celeridad de propagación de la onda. La energía que atraviesa la unidad de superficie, normalmente a ella, en la unidad de tiempo recibe el nombre de *intensidad* de la onda, que en este caso será

$$I = \tfrac{1}{2}\,\rho\,\omega^2\,A^2\,v \tag{11.11}$$

y vemos que es directamente proporcional al cuadrado de la ampli-

tud. O sea que para una onda de frecuencia dada que se propague por un medio homogéneo e isótropo podemos escribir

$$I = K A^2$$

Consideremos, en un instante dado, una superficie de onda esférica de radio r y otra de radio r'. La energía total que las atraviesa, por unidad de tiempo, vale

$$E = 4\pi r^2 I \qquad \text{y} \qquad E' = 4\pi r'^2 I'$$

respectivamente, y si no hay pérdida de energía en el medio $E = E'$, con lo cual

$$r^2 I = r'^2 I' \qquad \text{o sea} \qquad \frac{I'}{I} = \frac{r^2}{r'^2}$$

lo que podemos expresar diciendo que *en las ondas esféricas, las intensidades están en razón inversa a los cuadrados de las distancias al foco, o centro emisor, de la perturbación.* Como $I = K A^2$, deducimos que $A/A' = r'/r$, o sea que las amplitudes son inversamente proporcionales a las distancias al centro emisor.

En las ondas planas puede tomarse $r = r'$, con lo cual $I = I'$ y $A = A'$. Si no hay pérdida de energía en el medio, en las ondas planas se mantienen constantes la intensidad y la amplitud.

A la trayectoria de la energía se le llama *rayo,* y en los medios isótropos coincide con la normal a la onda.

11.5 Absorción. Consideremos una onda plana que se propaga por un medio hòmogéneo e isótropo y tomemos como eje Ox su dirección de propagación (fig. 11.6). La experiencia nos enseña que, en

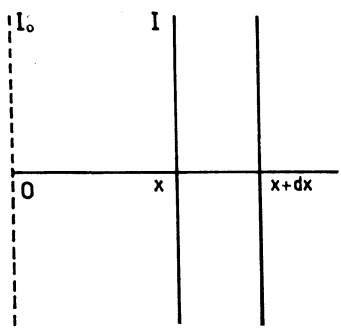


FIG. 11.6 Absorción.

general, se produce una pérdida de energía en el medio, lo que entraña una disminución de la intensidad de la onda a medida que se propaga. El fenómeno es semejante al que ocurría en el m.a.s. amortiguado. La disminución de intensidad $-dI$ correspondiente a un avance dx de la onda resulta ser, según se comprueba experimentalmente, proporcional a la intensidad I en el punto de abscisa x y al avance dx, con lo cual podemos escribir

$$-dI = \beta I\, dx \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dI}{I} = -\beta\, dx \tag{11.12}$$

siendo β una constante que depende del medio y de la frecuencia y que recibe el nombre de *coeficiente de absorción*. Integrando la ecuación 11.12 obtenemos

$$\ln I = -\beta x + \text{const.} \tag{11.13}$$

y llamando I_0 a la intensidad de la onda en el punto de abscisa $x = 0$, la ecuación 11.13 nos da

$$\ln I_0 = \text{const.}$$

y restando esta ecuación de la 11.13 tenemos

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\beta x \qquad \text{o sea} \qquad I = I_0\, e^{-\beta x}$$

que nos dice que la intensidad del movimiento ondulatorio disminuye exponencialmente al avanzar la onda en la dirección Ox. Si β fuese muy pequeño, podría despreciarse la *absorción*, que es el nombre que se da al fenómeno que hemos estudiado. Si las ondas son esféricas, la disminución por absorción se superpone a la disminución de la intensidad debida a ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

En ocasiones, puede interesar que la absorción sea grande, por ejemplo, en aislamientos acústicos, utilizándose entonces materiales de coeficiente de absorción elevado que se colocan en el trayecto de las ondas.

11.6 Principio de Huygens. En el siglo XVII, CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695), físico holandés, enunció el principio que lleva su nombre: *Todo punto de una superficie de onda puede considerarse como origen de ondas secundarias que se propagan con la misma celeridad*

que la principal. La envolvente de estas ondas secundarias será la nueva superficie de onda. Tendremos ocasión de aplicar este principio a distintos fenómenos de propagación. Ahora vamos a ver que es compatible con la propagación libre.

Sea una onda esférica cuya superficie, a una cierta distancia del origen en un medio homogéneo e isótropo y sin obstáculos, es S (figura 11.7). Cualquier punto O_k de esta superficie puede considerarse

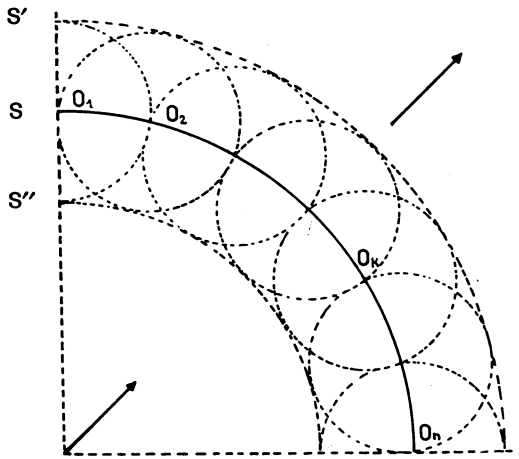


FIG. 11.7 Propagación libre de una onda, aplicando la construcción de Huygens.

origen de una onda secundaria que se propaga con la misma celeridad v que la onda considerada. Transcurrido un tiempo t, el radio de estas ondas secundarias será $r = v\,t$ y la envolvente es la superficie S', que es precisamente la superficie de la onda que se propaga después de recorrer la distancia r desde su posición en S; obtenemos el mismo resultado, tanto al considerar ondas secundarias como propagación directa.

En la figura 11.7 vemos que hay otra superficie envolvente, la S'', que se propaga en sentido contrario a la onda principal. A esta onda se le da el nombre de *regresiva,* y a la S' *progresiva.* La onda regresiva no tiene, en este caso, significado físico.

Según veremos más adelante, este principio fue modificado por el físico francés AUGUSTIN JEAN FRESNEL (1788-1827), quien interpretó satisfactoriamente la ausencia de onda regresiva.

11.7 Reflexión y refracción de una onda plana. Consideremos dos medios separados por una superficie S (fig. 11.8). Cuando llega a ella

una onda, su energía se refleja en parte (vuelve al primer medio) y el resto se transmite pasando al segundo medio. La aplicación del principio de Huygens nos va a permitir interpretar este fenómeno y deducir las leyes que lo rigen.

Al llegar una onda a la superficie S cada uno de los puntos de ésta es origen de ondas secundarias. Considerando una porción de onda suficientemente reducida, tanto ella como la superficie sobre la que incide podrán considerarse planas. Así, la onda incidente ven-

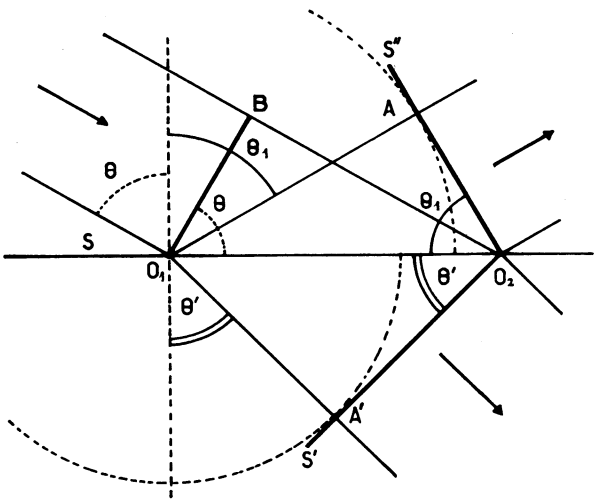


FIG. 11.8 Reflexión y refracción.

drá representada por el plano O_1B (fig. 11.8) cuando alcance el punto O_1 de la superficie reflectora S. En este instante, O_1 se convierte en centro emisor de ondas que se propagarán por el primer medio con celeridad v y por el segundo con celeridad v'. En su avance, la onda incidente tarda un tiempo t en alcanzar el punto O_2 de S, es decir, $B\,O_2 = v\,t$ y durante este tiempo la onda emitida inicialmente por O_1 se habrá convertido en una superficie semiesférica de radio $r = v\,t$ en el primer medio, y en otra de igual forma, pero de radio $r' = v'\,t$, en el segundo. La esfericidad de dichas ondas se debe a que suponemos isótropos uno y otro medio. La envolvente de las ondas secundarias emitidas por los distintos puntos entre O_1 y O_2 en el primer medio es, en el instante t, el plano S'' (recta O_2A en la fig. 11.8), y en el segundo medio el plano S' (recta $A'O_2$ en la fig. 11.8), según puede demostrarse fácilmente por consideraciones geométricas elementales.

Ahora bien, el plano S'' forma con la superficie S un ángulo θ_1, y el S' forma con S un ángulo θ', pero de la figura 11.8 deducimos que los triángulos rectángulos O_1AO_2 y O_1BO_2 son iguales, pues tienen la hipotenusa común y los catetos $O_1A = BO_2$, que son los caminos recorridos por la onda secundaria y por la incidente, respectivamente, en el tiempo t. De aquí deducimos que los ángulos BO_1O_2 y AO_2O_1 son iguales y por tanto $\theta = \theta_1$. También se deduce de la figura 11.8 que las direcciones de propagación de la onda incidente y de la reflejada están en un mismo plano con la normal a S. El ángulo θ que forma con la normal a la superficie S la dirección de la onda incidente se llama *ángulo de incidencia*; el que forma con dicha normal la dirección de la onda reflejada es igual a θ_1 y se llama *ángulo de reflexión*, con lo cual las leyes de la reflexión se enuncian de la manera siguiente:

El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.
La dirección de propagación de la onda incidente, la de la reflejada y la dirección de la normal a la superficie de separación están en un mismo plano.

Vamos a considerar ahora la onda transmitida o refractada. Del triángulo rectángulo $O_1A'O_2$ (fig. 11.8) deducimos que

$$O_1A' = O_1O_2 \operatorname{sen} \theta'$$

y del triángulo O_1BO_2,

$$BO_2 = O_1O_2 \operatorname{sen} \theta$$

dividiendo miembro a miembro estas últimas igualdades y teniendo en cuenta que $O_1A' = v' t$ y $BO_2 = v t$, resulta

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} = \frac{v}{v'} \tag{11.14}$$

De la figura 11.8 también se deduce que la dirección de propagación de la onda incidente, la de la transmitida y la de la normal a la superficie de separación, están en un mismo plano. Esta afirmación, junto con la ecuación 11.14, constituyen las leyes de la refracción. Al cociente v/v' se le da el nombre de *índice de refracción* del segundo medio respecto al primero.

Despejando sen θ' de la ecuación 11.14 tenemos

$$\operatorname{sen} \theta' = \frac{v'}{v} \operatorname{sen} \theta$$

Si $v' < v$, la dirección de propagación de la onda refractada se aproxima a la de la normal y siempre existe onda transmitida, ya que sen $\theta' < 1$. Si $v' > v$, la dirección de la onda refractada se aleja de la normal. En el caso de que (v'/v) sen $\theta = 1$, $\theta' = 90°$. Al ángulo θ_L = arc sen (v/v') se le da el nombre de *ángulo límite,* para el cual la dirección de la onda refractada es paralela a la superficie de separación de los dos medios. Para ángulos de incidencia superiores a θ_L no hay onda transmitida. A este fenómeno se le da el nombre de *reflexión total* y en él toda la energía de la onda incidente se conserva en la onda reflejada.

Si el medio no es homogéneo y suponemos que la celeridad de propagación de la onda aumenta gradualmente al avanzar la onda hacia la parte inferior de la figura 11.9, podemos considerar las sucesivas refracciones en las capas de espesor elemental. Como el ángulo que forma con la normal es cada vez mayor, ya que v' aumenta, en determinada capa sufrirá reflexión total y la onda se propagará hacia la parte superior, según se indica en la figura 11.9, describiendo una trayectoria curva. Un observador situado en O tendría la impresión de que la onda procede de un punto F' simétrico del foco perturbador respecto al plano PP'. Este fenómeno es preciso tenerlo en cuenta en la detección de submarinos por ondas sonoras o ultrasonoras.

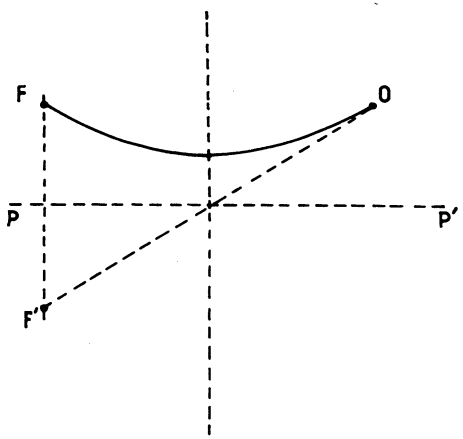


FIG. 11.9 Propagación en un medio no homogéneo.

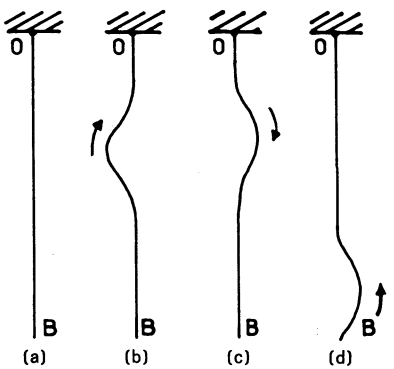


FIG. 11.10 *a)* Cuerda suspendida del punto fijo *O*. *b)* Onda transversal que asciende hacia *O*. *c)* Onda reflejada en *O* donde ha invertido su fase. *d)* Al llegar la onda al extremo libre se refleja sin alterar su fase.

11.8 Reflexión con cambio de fase. Si una onda incide normalmente a la superficie de separación de dos medios, se refleja y se transmite sin que se altere su dirección de propagación. Ahora bien, la onda reflejada puede presentar un cambio de fase. Veamos un ejemplo con ondas transversales.

En la figura 11.10 representamos una cuerda suspendida del techo en un punto *O*. Damos un tirón brusco hacia un lado de su extremo libre *B* y se origina un pulso transversal que se propaga a lo largo de la cuerda (fig. 11.10 *b*) hasta llegar al punto fijo *O*, que no puede vibrar, y el pulso se refleja y se propaga en sentido contrario. La sacudida, al llegar a *O*, ejerce sobre este punto una fuerza y la reacción de éste se ejerce sobre la cuerda en sentido contrario (confrontar § 6.3) y hace que el pulso sea simétrico del anterior (fig. 11.10 *c*). Esto da lugar a una inversión de fase, lo cual corresponde a que ésta cambie bruscamente en π radianes, que es lo que hubiera cambiado al avanzar el pulso media longitud de onda sin obstáculo.

El pulso reflejado se propaga hacia abajo y cuando llega al extremo libre *B*, en el que no hay reacción alguna, pues no se ejerce ninguna fuerza, como no hay resistencia, la amplitud es mayor y da lugar a un pulso como el originado inicialmente, el cual se refleja y se propaga de nuevo hacia arriba, pero ahora sin alterar la fase en la reflexión.

Consideremos ahora la reflexión de una onda longitudinal. En la figura 11.11 *a* representamos un tubo cerrado por su extremo de la derecha, y en la figura 11.11 *b* un tubo análogo que tiene su extremo de la derecha abierto. En el extremo izquierdo de cada uno de ellos

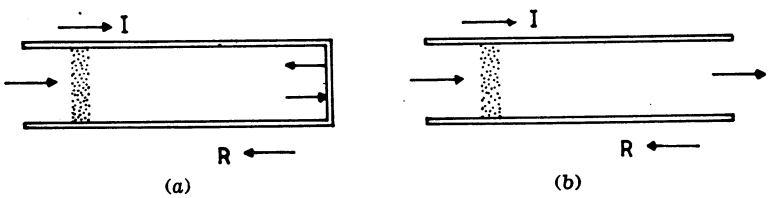


FIG. 11.11 Reflexión de una onda longitudinal *a*) en el extremo cerrado de un tubo, y *b*) en un extremo abierto.

se produce una compresión constituida por desplazamientos hacia la derecha de las partículas del fluido, compresión que se propaga por el interior del tubo hacia la derecha. Al llegar la onda al extremo cerrado, las partículas del fluido chocan contra él y si el choque es elástico, como la masa del extremo del tubo es mucho mayor que la de las partículas, éstas rebotan hacia la izquierda con igual cele-

ridad (basta hacer $v_2 = 0$ y $m_2 \to \infty$ en las ec. 9.14 para comprobarlo). La capa comprimida invierte su sentido de movimiento en el extremo cerrado y la compresión regresa hacia el extremo abierto, pero *el desplazamiento de las partículas es ahora hacia la izquierda.* Se ha producido una inversión de fase.

La compresión en el tubo abierto (fig. 11.11 b) se propaga por él y al llegar al extremo de la derecha continúa su movimiento, pues no hay nada que se lo impida. Al salir al exterior se expansiona y provoca una disminución de presión en los puntos del citado extremo. Por tanto, tendremos una expansión con las partículas moviéndose aún de izquierda a derecha y que se propaga por el tubo de derecha a izquierda, pues en las expansiones aludidas las partículas se mueven en sentido contrario al de la propagación de la onda. En la reflexión por un extremo abierto, pues, la variación de fase es nula, ya que no varía el sentido de la elongación de las capas de fluido.

Generalizando los resultados obtenidos, podemos expresar que *la reflexión producida sobre un medio más resistente lleva consigo un salto de fase de* π *radianes, mientras que la reflexión sobre un medio menos resistente no introduce variación de fase.*

11.9 Interferencias. Todo punto de un medio afectado por dos movimientos ondulatorios sufrirá un desplazamiento debido a cada uno de ellos. Supongamos que las ondas que actúan en dicho punto son armónicas, del mismo período, y que prácticamente la dirección de propagación sea la misma. La elongación resultante del punto mencionado será la composición de las que originarían, por separado, las dos ondas. En definitiva, se reduce a la composición de dos m.a.s. tratada en el § 10.7. Sea la elongación debida a la primera onda

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right)$$

y la debida a la segunda

$$y_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x_2}{v} \right)$$

La representación de Fresnel (§ 10.7) nos permite representar estas vibraciones por dos vectores de módulos A_1 y A_2, respectivamente, que formen un ángulo

$$\theta = \omega \frac{x_2 - x_1}{v} = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \qquad (11.15)$$

y la elongación resultante $y = y_1 + y_2$ tendrá una amplitud A igual al módulo del vector suma de los dos anteriores. La suma de dos vectores de módulos dados A_1 y A_2 tendrá módulo máximo, siendo $A_1 + A_2$ el valor de dicho módulo, cuando los vectores tengan igual dirección y sentido, es decir, cuando $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2k\pi$; y como θ está expresado por la ecuación 11.15, ello equivale a

$$2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

o sea

$$x_2 - x_1 = k\lambda \tag{11.16}$$

lo cual significa que *en los puntos en donde la diferencia de marcha de los dos movimientos ondulatorios sea igual a un número entero de longitudes de onda, la amplitud de la vibración resultante es máxima e igual a la suma de las amplitudes debidas a uno y otro movimiento por separado.*

Análogamente, la amplitud de la vibración resultante será mínima e igual a $|A_1 - A_2|$ cuando los vectores representativos tengan igual dirección pero sentidos contrarios, es decir, cuando $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots, (2k + 1)\pi$, o sea

$$2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = (2k + 1)\pi \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

de donde

$$x_2 - x_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{11.17}$$

lo cual significa que *en los puntos donde la diferencia de marcha de los dos movimientos ondulatorios es igual a un múltiplo impar de semilongitudes de onda, la amplitud es mínima e igual a la diferencia de las amplitudes debidas a uno y otro movimiento por separado.*

Esta superposición de dos movimientos ondulatorios de frecuencias *exactamente iguales* se conoce con el nombre de *interferencia,* y se dice que en los puntos donde la amplitud es máxima existe *interferencia constructiva,* mientras que en los de amplitud mínima existe *interferencia destructiva.*

Se comprende que si ambos movimientos ondulatorios tuvieran amplitudes iguales en los puntos donde se produzca interferencia destructiva, en ellos no habría vibración.

El lugar geométrico de los puntos de máximo o de mínimo es un

conjunto de hiperboloides homofocales de revolución, ya que el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante, es un hiperboloide cuyos focos son los dos puntos fijos. En nuestro caso, los focos son los dos orígenes de la perturbación. En la figura 11.12 hemos representado la familia de hipérbolas homofocales que se obtiene al cortar los hiperboloides por un plano meridiano y nos da una imagen de lo que ocurriría en un caso bidimensional, por ejemplo, en el caso de ondas superficiales. Para

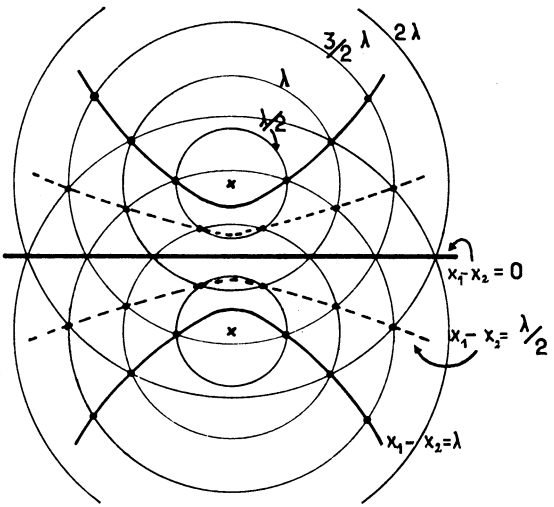


FIG. 11.12 Interferencias.

construirlas gráficamente bastaría trazar circunferencias centradas en los orígenes de las ondas y de radios $\lambda/2$, λ, $3\lambda/2$, 2λ, $5\lambda/2$, 3λ, etc., y la intersección de dos circunferencias cuyos radios sean ambos iguales a un número par (o ambos a un número impar) de longitudes de onda nos dará un punto de interferencia constructiva, ya que la diferencia de distancias a los dos focos es un múltiplo de λ. La intersección de una circunferencia de radio igual a un múltiplo de λ y otra de radio que sea múltiplo impar de $\lambda/2$ nos dará un punto de interferencia destructiva, ya que la diferencia de distancias es, en este caso, un número impar de semilongitudes de onda.

11.10 Pulsaciones. Consideremos un punto alcanzado por dos ondas de frecuencias poco diferentes f_1 y f_2 y cuyas amplitudes supon-

dremos iguales para mayor simplicidad. Tomando un origen de tiempos conveniente, las elongaciones de uno y otro movimiento podrán representarse por

$$y_1 = A \operatorname{sen} 2\pi f_1 t \qquad y_2 = A \operatorname{sen} 2\pi f_2 t$$

y la elongación resultante será

$$y = A\,(\operatorname{sen} 2\pi f_1 t + \operatorname{sen} 2\pi f_2 t) = 2A \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \operatorname{sen} 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t$$

que haciendo

$$A' = 2A \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \qquad f = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{11.18}$$

queda en la forma:

$$y = A' \operatorname{sen} 2\pi f t \tag{11.19}$$

Como f_1 y f_2 son muy poco diferentes, su media aritmética f será sensiblemente igual a ellas y $(f_1 - f_2)/2$ será un número muy pequeño, por lo que A' variará muy lentamente. Es decir, que durante el tiempo correspondiente a unos pocos períodos de los movimientos componentes, A' se mantiene prácticamente constante. Tendremos, pues, un movimiento resultante de frecuencia f y amplitud A'.

No obstante, A' es función cosinusoidal del tiempo de frecuencia $(f_1 - f_2)/2$, y como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, ésta será función periódica de frecuencia $f_1 - f_2$, ya que la función $\cos^2 \omega t$ tiene frecuencia doble que la función $\cos \omega t$.

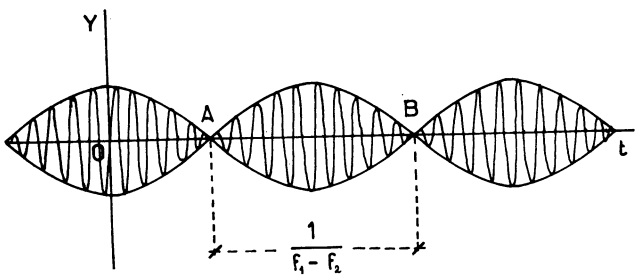


FIG. 11.13 Pulsaciones. Véase fotografía p. 201.

Por tanto, la intensidad se anulará y se hará máxima $f_1 - f_2$ veces por segundo, lo cual se expresa diciendo que el movimiento ondulatorio sufre $f_1 - f_2$ pulsaciones por segundo. En la figura 11.13 se ha

representado la elongación del movimiento resultante, en función del tiempo. Los puntos *A*, *B*, ... corresponden a los instantes en que *A'* se anula cambiando de signo, lo cual representa que entonces, al tiempo que se anula la amplitud del movimiento resultante, se invierte su fase.

11.11 Ondas estacionarias. Supongamos dos ondas planas de igual frecuencia y amplitud que se propagan en la misma dirección pero en sentidos contrarios. Tomemos la dirección de propagación como eje *Ox*, siendo *O* un punto en el cual las dos ondas tengan la misma fase. Como origen de tiempos tomaremos el instante en que es nula la elongación de la vibración en *O*, con lo cual en un punto de abscisa x (y por tanto en todos los puntos del plano normal al eje y que pasa por x) la elongación será

$$y_1 = A \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

para la onda que se propaga en el sentido positivo e

$$y_2 = A \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

para la onda que se propaga en sentido contrario. En este punto interfieren y la elongación resultante es

$$y = A \left[\operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]$$

que aplicando la relación trigonométrica de la suma de dos senos queda en la forma

$$y = 2A \operatorname{sen} \omega t \cos \omega \frac{x}{v} = A' \operatorname{sen} \omega t \qquad (11.20)$$

siendo

$$A' = 2A \cos \omega \frac{x}{v} \qquad (11.21)$$

La ecuación 11.20 nos indica que el movimiento tiene la misma fase en todos los puntos. Esto es lo que se expresa diciendo que las ondas son *estacionarias*. En el fenómeno de la propagación vimos que una característica esencial es que existen diferencias de fase entre

distintos puntos del medio y podíamos definir un período espacial, o longitud de onda, relacionado con la celeridad de propagación, la cual también recibe el nombre de velocidad de fase.

El valor de la amplitud depende de la abscisa del punto considerado. En los puntos cuya abscisa sea tal que $\omega\,(x/v) = n\,\pi$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), o sea $x = n\,\pi\,v/\omega = n\,\lambda/2$, la amplitud A' será máxima e igual a $2\,A$. Estas posiciones en donde A' es máxima reciben el nombre de *vientres*. Los planos normales a la dirección x que pasen por los puntos citados se llaman planos ventrales.

Cuando $\omega\,x/v = (2\,n + 1)\,\pi/2$, es decir, en los puntos de abscisa $x = (2\,n + 1)\,\lambda/4$, la amplitud es nula. A estas posiciones se les llama *nodos* y a los planos normales a Ox que pasan por ellos se les da el nombre de planos nodales.

Los puntos de máximo tienen abscisas múltiplo de media longitud de onda y las abscisas de los de mínimo nulo son múltiplos impares de un cuarto de la longitud de onda. La distancia entre dos vientres, o entre dos nodos, consecutivos es de media longitud de onda, y entre un vientre y el nodo inmediato existe una separación igual a un cuarto de longitud de onda. De aquí que si podemos determinar las posiciones de vientres y nodos podamos hallar la longitud de onda, y si conocemos la frecuencia de vibración se podrá determinar la celeridad de propagación.

Las ondas estacionarias pueden producirse cuando se refleja una onda plana en un obstáculo plano normal a la dirección de propagación. Si en la reflexión no hay cambio de fase obtendremos exactamente lo que acabamos de expresar. Si en la reflexión hubiera inversión de fase, la onda reflejada sería

$$y' = -A \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

y al interferir con la onda progresiva resulta

$$Y = A \left[\operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right]$$

$$= -2\,A \operatorname{sen} \omega \frac{x}{v} \cos \omega\,t$$

que haciendo

$$A' = -2\,A \operatorname{sen} \omega \frac{x}{v}$$

queda en la forma

$$Y = A' \cos \omega t$$

Ahora tendremos los máximos cuando

$$\omega \frac{x}{v} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{o sea} \qquad x = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

y para los mínimos nulos

$$\omega \frac{x}{v} = n\pi \qquad \text{o sea} \qquad x = n\frac{\lambda}{2}$$

Los puntos en los que hay máximo si no se produce cambio de fase son nodos en el caso que se produjera, y recíprocamente, a los nodos, cuando no hay inversión de fase en la reflexión, les corresponderán vientres cuando se produzca dicha inversión. Cuando la onda incide en el obstáculo invirtiéndose la fase, aquél no vibra y el plano del obstáculo deberá ser un plano nodal. Su intersección con la dirección de propagación es un nodo. De los resultados obtenidos se desprende que cuando hay inversión de fase este punto es un nodo y cuando no la hay deberá ser un vientre.

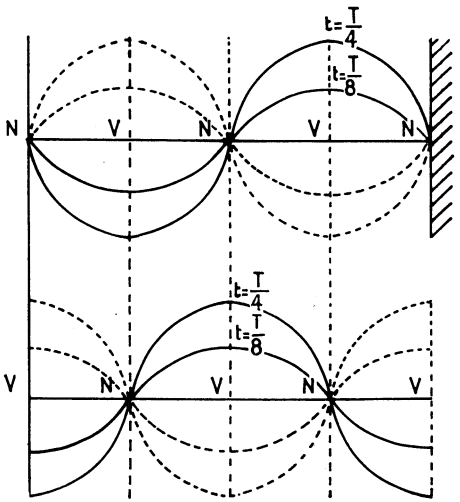


FIG. 11.14 Distribución de las elongaciones para distintos instantes en una onda estacionaria creada por reflexión (*a*) con inversión de fase y (*b*) sin inversión de fase.

En los nodos es siempre $y = 0$, mientras que en los vientres es $A' = \pm 2A$ y la vibración de éstos obedecerá a la ley:

$$y = \pm 2A \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(si no hay cambio de fase)}$$
$$y = \pm 2A \cos \omega t \qquad \text{(si se invierte la fase)}$$

De aquí que en el primer caso, para $t = (2n + 1)\, T/4$, $y = 2A$ y para $t = 0$, $y = 0$ en los vientres, por lo que todos los demás puntos deberán tener también nula su elongación. En el segundo caso, para $t = 0$ o múltiplo de T, la elongación de los vientres será $2A$ y para t múltiplo impar de $T/4$ todos los puntos tendrán elongación nula. En las figuras 11.14 se representa la elongación en las ondas estacionarias en ambos casos.

11.12 Difracción. Cuando una onda encuentra un obstáculo o pasa a través de un orificio, su dirección de propagación no es rectilínea y su intensidad presenta anomalías en distintos puntos. Estos fenómenos reciben el nombre de *difracción* de la onda y dependen de las dimensiones de los obstáculos u orificios y de la longitud de onda, según veremos. Para estudiar estos fenómenos, FRESNEL modificó el principio de Huygens y su enunciado, llamado de Huygens-Fresnel, puede expresarse de la manera siguiente:

Para encontrar la amplitud de un movimiento ondulatorio en un punto debe hallarse el resultado en éste de las interferencias entre las ondas secundarias que parten de la superficie de una onda anterior a dicho punto.

Vamos a considerar los fenómenos de difracción a distancia finita del obstáculo, llamados fenómenos de *difracción de Fresnel*. En Óptica veremos, además, los de Fraunhofer a distancia infinita.

Para que el estudio sea lo más elemental posible, consideremos una onda plana y hallemos el movimiento ondulatorio en un punto P a distancia b del plano de la onda. Descompondremos la superficie de ésta de la manera siguiente (fig. 11.15): Desde P tomamos las distancias $b + \lambda/2$, $b + 2\lambda/2$, ..., $b + n\lambda/2$ que determinan sobre el plano de la onda distintas circunferencias de radios R_1, R_2, ..., R_n, que los determinamos aplicando el teorema de Pitágoras:

$$R_1^2 = (b + \lambda/2)^2 - b^2 = b\lambda + \lambda^2/4$$
$$R_2^2 = (b + 2\lambda/2)^2 - b^2 = 2b\lambda + \lambda^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si es b mucho mayor que λ, podemos despreciar el segundo sumando y tenemos

$$R_1^2 = b\lambda \qquad R_2^2 = 2b\lambda \qquad \ldots\ldots \qquad (11.22)$$

El primer círculo de la figura 11.15 y las coronas circulares restantes reciben el nombre de *zonas de Fresnel.* Las áreas de las distintas zonas valen, considerando los valores aproximados dados por las ecuaciones 11.22,

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi b \lambda$$
$$S_2 = \pi (R_2^2 - R_1^2) = \pi b \lambda$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$S_k = \pi (R_k^2 - R^2_{k-1}) = \pi b \lambda$$

y vemos que todas tienen el mismo valor $\pi b \lambda$.

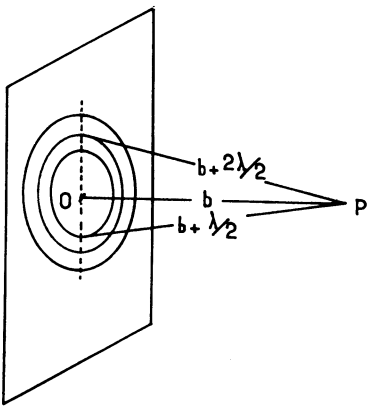


FIG. 11.15 Zonas de Fresnel.

Podemos descomponer cada zona en elementos de superficie de los cuales partan las ondas secundarias que alcancen el punto *P*. El número de estas áreas elementales será el mismo para dos zonas de Fresnel cualesquiera, en virtud de la igualdad de sus áreas. A todo punto (o elemento de superficie) de una zona, le corresponderá otro de la zona inmediata tal que la diferencia de sus distancias a *P* sea igual a media longitud de onda, por lo que al interferir las dos ondas secundarias en *P* darán intensidad nula. El efecto de una zona se anulará con el de la siguiente, o con el de la precedente. Esto es sólo aproximado, pues a medida que nos alejamos de *OP* aumenta la inclinación y el efecto de las zonas va disminuyendo gradualmente. Por ejemplo, el efecto de la segunda zona será opuesto al de la primera, pero ligeramente inferior y opuesto al de la tercera y ligeramente superior. Los efectos de las zonas impares 1, 3, 5, ... son de sentido contrario al de las pares 2, 4, 6, ..., y para evitar el error de inclinación antes citado, podemos considerar que el efecto de la segunda zona anula al promedio del efecto de las zonas 1 y 3, y así sucesivamente.

Es decir, si es s_1 la elongación debida a las ondas secundarias que partiendo de la zona 1 llegan a *P*, s_2 la debida a la zona 2, s_3 la de la zona 3, etc., la elongación total será

$$S = s_1 - s_2 + s_3 - \ldots = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} + \frac{s_3}{2} - s_2\right) + \left(\frac{s_3}{2} + \frac{s_5}{2} - s_4\right) + \ldots \pm \frac{s_n}{2}$$

y por lo dicho anteriormente, que la elongación debida a la zona 2 se compensa con la media aritmética de las elongaciones debidas a las zonas 1 y 3 y así sucesivamente, vemos que la elongación resultante se reduce a $S = s_1/2$, ya que el último sumando puede despreciarse por ir disminuyendo gradualmente los efectos de las zonas al ir siendo más alejadas. El efecto total de la onda en el punto P es igual al de la mitad de la primera zona de Fresnel correspondiente a este punto. Si colocamos una pantalla con un orificio circular de área la mitad de la primera zona correspondiente a un punto P, en este punto el efecto de la onda es el mismo que el de la onda entera. Si el orificio tiene área igual a la de la primera zona, la elongación es doble y la inten-

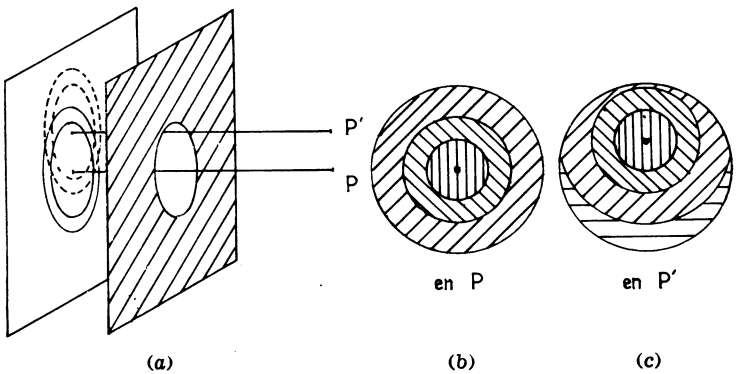


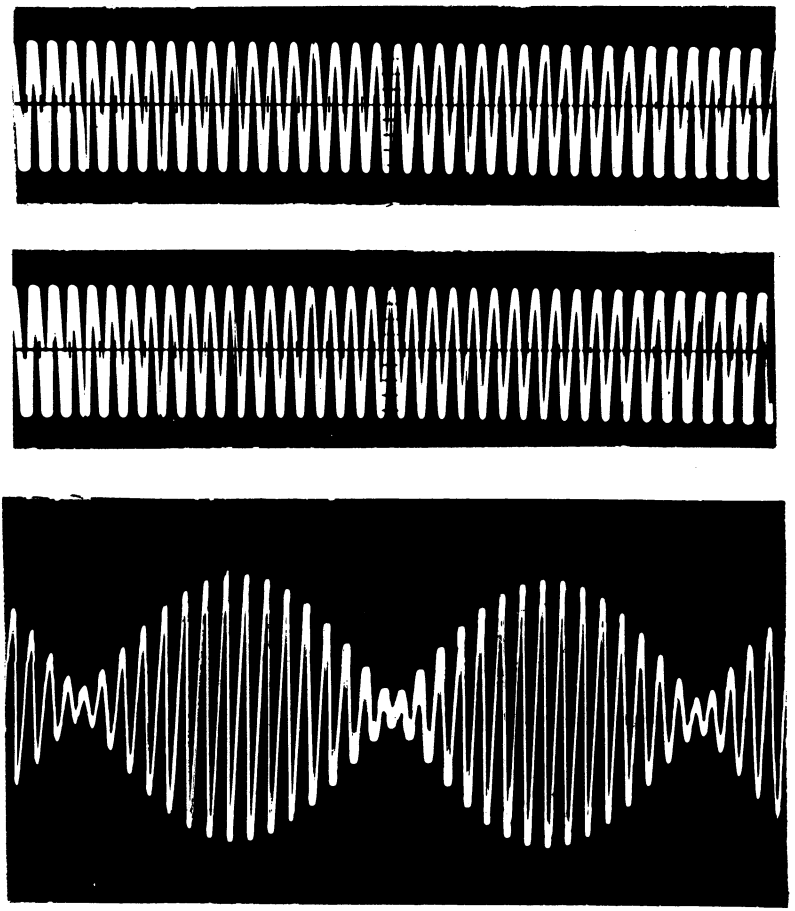
FIG. 11.16 *a*) Zonas de Fresnel para el punto P y para el punto P'. *b*) Las tres primeras zonas de Fresnel vistas a través del orificio desde el punto P. *c*) Vistas desde P', las zonas de Fresnel no son las mismas que antes. El orificio oculta parcialmente la tercera.

sidad cuatro veces mayor. Si el orificio tiene por radio R_2, en P tendremos elongación prácticamente nula. Al variar el radio del orificio, en el punto P tendremos máximos y mínimos de intensidad. Para un punto P' fuera del eje, las zonas se desplazan una distancia igual a la distancia del punto al eje (fig. 11.16 *a*). La pantalla antes citada tendrá efecto distinto para este punto, pues las zonas de Fresnel que oculta son distintas. Al alejarnos del eje tendremos puntos de intensidad variable que dependen de la posición del punto y del radio del orificio. En la figura 11.16 *a* se representan las zonas de Fresnel que actúan sobre un punto P' fuera del eje. El orificio hace que sobre P' sólo puedan influir la primera, la segunda y parte de la tercera (en este caso particular) de las zonas que se trazarían desde P' con arreglo al criterio definido anteriormente y resumido en las ecuaciones 11.22.

En el caso de las ondas sonoras de frecuencia 330 Hz, la longitud de onda en el aire en condiciones normales es de 1 m. Para un punto situado a 1 m de distancia, el radio de la primera zona de Fresnel es de 1 m. Rara vez se podrán despreciar, en Acústica, los fenómenos de difracción, pues las ventanas, puertas, etc., tienen dimensiones del orden del metro y gracias a ello puede escucharse a un orador desde fuera de la sala sin verlo, por haber una pared por medio, si en algún lugar de ésta hubiera una puerta o ventana

abierta, ya que el fenómeno de la difracción permite al sonido rodear el borde de la abertura y llegar al oído.

Hemos estudiado los máximos y mínimos debidos a un orificio circular de radio variable. Podríamos ver que se obtienen resultados análogos al mantener constante este radio y considerar puntos a distancia variable del plano del orificio, ya que las zonas de Fresnel correspondientes a puntos a distancias diferentes son también diferentes. Si el orificio no es circular o tenemos un obstáculo de forma cualquiera, también se obtienen fenómenos de difracción cuyo estŭdio analítico es más complicado.



La composición de los dos movimientos superiores origina el que se ve en la figura inferior.

12

Acústica

Todo cuerpo que vibra origina un movimiento ondulatorio que se propaga por el medio que rodea al cuerpo vibrante. En ocasiones, el medio es el aire y el movimiento ondulatorio se propaga por él en forma de ondas longitudinales que producen variaciones de presión, las cuales se propagan como la onda. Al alcanzar el oído humano producirán, si se cumplen ciertas condiciones de intensidad y frecuencia, una sensación llamada sonora. Podemos definir, pues, el sonido como la sensación producida en el oído por un movimiento ondulatorio y a dichas ondas se les da el nombre de ondas sonoras. La parte de la Física que estudia las ondas sonoras es la Acústica, y puede estudiarse desde distintos puntos de vista:

Desde el punto de vista artístico puede considerarse la Acústica musical, que estudia los sistemas que producen sonidos musicales, o sea agradables al oído.

La Acústica urbana estudia fundamentalmente las condiciones de las salas de audición.

La Acústica fisiológica estudia la producción de sonidos por la voz y la recepción de los mismos por el oído.

La Acústica física, propiamente dicha, es un capítulo de la Mecánica de las ondas elásticas que estudia la producción, propagación y recepción de las ondas sonoras. Desde el punto de vista físico, el estudio de la Acústica podemos extenderlo a un dominio de frecuencias más amplio que el que, desde el punto de vista fisiológico, poseen los sonidos. Así, llamaremos *infrasonidos* a las ondas elásticas de frecuencias inferiores a las audibles, y *ultrasonidos* a las de frecuencias superiores a las audibles.

Para estudiar el sonido puede hacerse la traducción de las ondas en variaciones de campos eléctricos o magnéticos, y si se trata de ultrasonidos o infrasonidos esta traducción es casi obligada. Éste es

un aspecto de la Electroacústica que ha adquirido una importancia extraordinaria en la actualidad, particularmente en el registro y reproducción de sonidos por procedimientos magnéticos.

12.1 Cualidades del sonido. Un sonido se caracteriza por su *intensidad, tono* y *timbre*. La *intensidad* de un sonido es la de la onda sonora en el punto de recepción. Como se trata de ondas elásticas, es proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración. La intensidad del sonido es la cualidad por la cual éste se percibe como «fuerte», «débil» o inaudible por su baja intensidad.

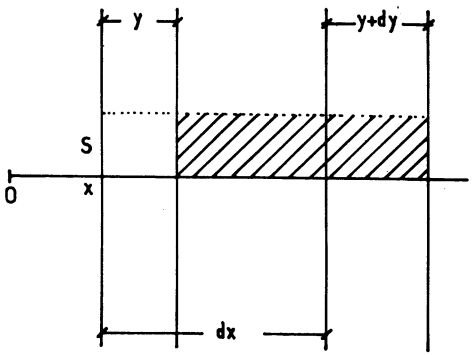


FIG. 12.1 Onda de presión.

Como la medida directa de la amplitud de la vibración puede ser difícil de realizar, se prefiere expresar la intensidad en función de la variación máxima de presión que origina el sonido al propagarse, la cual es más asequible a la medida. Para ello consideremos (fig. 12.1) una porción de onda de área S suficientemente pequeña para poder considerarla plana y que en un cierto instante tiene una abscisa x y sufre un desplazamiento y. Simultáneamente, la onda de abscisa $x + dx$ sufrirá un desplazamiento $y + dy$, con lo que el cilindro de base S comprendido entre dichas ondas antes de desplazarse y cuyo volumen era

$$V = S\,dx \tag{12.1}$$

se habrá convertido en el que aparece sombreado en la figura 12.1 y cuyo volumen es

$$V + dV = S(dx + y + dy - y)$$

y restando de esta igualdad la ecuación 12.1 obtendremos el incre-

mento de volumen experimentado por el medio a causa de la perturbación sonora

$$dV = S\,dy \tag{12.2}$$

y dividiendo miembro a miembro las ecuaciones 12.2 y 12.1 tenemos

$$\frac{dV}{V} = \frac{dy}{dx} \tag{12.3}$$

cuyo segundo miembro es la derivada de la elongación y respecto a x, considerando constante el tiempo t, pues los fenómenos descritos tienen lugar en un mismo instante.

Por otra parte, como las ondas sonoras son longitudinales y estamos suponiendo que se propagan por un fluido, la ecuación 11.6 nos permitirá escribir para su celeridad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \tag{11.6}$$

Llamando p a la sobrepresión asociada al desplazamiento considerado, el módulo de compresibilidad podrá escribirse, teniendo en cuenta la ecuación 12.3, en la forma

$$\chi = \frac{-p}{dV/V} = -p\,\frac{dx}{dy}$$

que sustituida en la ecuación 11.6 nos da

$$v^2 = \frac{-p}{\rho\,\dfrac{dy}{dx}}$$

de donde

$$-p = \rho\, v^2\,\frac{dy}{dx} \tag{12.4}$$

Ahora bien, suponiendo armónico el movimiento ondulatorio, la elongación es

$$y = A \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{12.5}$$

que derivándola respecto a x, considerando constante t, da

$$\frac{dy}{dx} = -A\,\frac{\omega}{v}\cos\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

y sustituida en la ecuación 12.4 resulta

$$p = A \rho v \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \qquad (12.6)$$

De aquí resulta que la presión varía periódicamente en el espacio y en el tiempo o, dicho de otra manera, la sobrepresión se propaga por ondas. La ecuación 12.6 nos define la llamada *onda de presión* y, comparándola con la ecuación 12.5, vemos que está adelantada en fase 90° respecto a la onda de desplazamiento.

El valor máximo que alcanza la sobrepresión debida al sonido vemos que es

$$p_{max} = A \rho v \omega$$

y su cuadrado

$$p^2_{max} = A^2 \rho^2 v^2 \omega^2$$

y dividiendo esta ecuación por la 11.11, que da la intensidad del movimiento ondulatorio, resulta

$$\frac{p^2_{max}}{I} = 2 \rho v \qquad \text{o sea} \qquad I = \frac{p^2_{max}}{2 \rho v}$$

de donde resulta que *la intensidad del sonido es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda de presión asociada.*

Se dice que un sonido es simple, o puro, cuando se debe a un m.a.s. y, por tanto, tiene una frecuencia determinada. Ordinariamente, el sonido está compuesto por un conjunto de sonidos simples y se dice que presenta un *espectro acústico* o conjunto de sonidos puros, cada uno con su intensidad y frecuencia. En este caso, la onda es periódica, pero no sinusoidal. El Análisis Matemático enseña que *toda* función periódica puede descomponerse en forma única en una suma de funciones sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos de la más baja y ésta coincide con la frecuencia de la función considerada (teorema de Fourier). Es decir, que si es $F(t)$ una función periódica del tiempo, podremos escribir

$$F(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} (\omega t + \theta_1) + A_2 \operatorname{sen} (2 \omega t + \theta_2) + \ldots \qquad (12.7)$$

El término constante A_0 carece de interés en Acústica por no llevar asociada ninguna variación de presión. El término inmediato es el llamado *armónico fundamental* o primer armónico, el siguiente recibe el nombre de segundo armónico, y así sucesivamente. Los armónicos tienen amplitudes que suelen decrecer al aumentar el orden

de los mismos y en tal caso, a partir de una frecuencia determinada, las intensidades de los armónicos serán tan pequeñas que se podrán despreciar los términos correspondientes del desarrollo de Fourier.

El *tono* de un sonido simple está caracterizado por la frecuencia del mismo y se dice que es agudo o grave según que la frecuencia sea elevada o baja, respectivamente. También se le llama *altura* del sonido. Si la onda no es sinusoidal, se caracteriza por la frecuencia del sonido fundamental, el cual es, por lo general, el más intenso. Si el sonido está compuesto por varios sonidos puros de distintas frecuencias que no sean múltiplos de una misma, y de distintas intensidades, la determinación del tono es complicada y subjetiva.

El *timbre* de un sonido viene caracterizado por el número e intensidades de los armónicos que acompañan al sonido fundamental. La desigual proporción de armónicos permite distinguir entre dos instrumentos musicales que dan la misma nota o dos personas por su voz. El timbre de una voz puede cambiar cuando se recibe a través de un instrumento electroacústico, teléfono, magnetófono, etc., pues en el proceso pueden haberse reforzado diferentemente los armónicos, lo cual depende de la fidelidad de los dispositivos puestos en juego.

Al analizar un sonido se encuentran las intensidades correspondientes a las diferentes frecuencias, o intervalos estrechos de frecuencias, que lo componen. En la figura 12.2 se representa el espectro

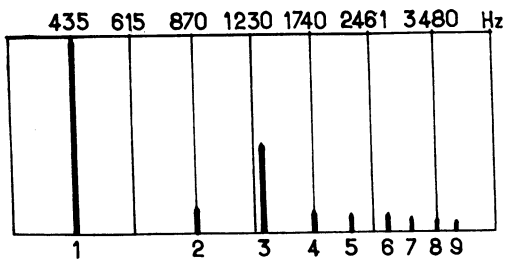


FIG. 12.2 Espectro acústico de un sonido de 435 Hz emitido por un violín.

de un sonido cuya frecuencia fundamental es 435 Hz y ha sido emitido por un violín. Se ha tomado como unidad la intensidad del armónico fundamental, con lo cual las demás intensidades son relativas.

En la vida corriente se habla de *ruido*. Desde el punto de vista físico, un ruido se considera como una perturbación sonora que puede ser superposición de sonidos diversos, desprovista de un carácter preciso de periodicidad. Podemos analizar un ruido por procedimientos electrónicos, determinando las in-

tensidades medias en intervalos de frecuencias pequeños. La intensidad del ruido será el valor medio, en determinado intervalo de frecuencias, de las intensidades antes halladas. Dicha intensidad de ruido tiene interés en Acústica urbana y suele expresarse como *nivel de ruido.*

12.2 Fenómenos de propagación. Por ser elásticas las ondas sonoras, poseen las propiedades de aquéllas, y por tanto se podrán propagar por los sólidos en forma de ondas longitudinales y transversales, mientras que por los fluidos sólo podrán hacerlo en forma de ondas longitudinales. Como suelen llegar al oído a través del aire, vamos a estudiar su celeridad de propagación en este medio. Ya hemos indicado que la celeridad de propagación de las ondas longitudinales por un fluido está dada por la ecuación 11.6, y si representamos por dp la variación de la presión que origina una contracción unitaria de volumen $-dV/V$, el módulo de compresibilidad vendrá dado por

$$\chi = -V\frac{dp}{dV} \tag{12.8}$$

donde ahora p es la *presión* total en el aire y no la sobrepresión o exceso sobre la presión del aire en ausencia de sonido, la cual es dp. Estas variaciones de presión debidas al sonido son tan rápidas que podemos despreciar el intercambio calorífico con el medio. Esto se expresa diciendo que las variaciones de presión son *adiabáticas,* y considerando el aire como gas perfecto, cumplen con la ecuación (cfr. § 17.10)

$$p\,V^{\gamma} = \text{const.}$$

Diferenciando esta expresión obtenemos

$$p\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,dV + dp\,V^{\gamma} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \gamma\,p\,dV + V\,dp = 0$$

de donde

$$\gamma\,p = -V\frac{dp}{dV} = \chi$$

con lo cual podremos escribir la celeridad de propagación en la forma

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\,p}{\rho}} \tag{12.9}$$

y conociendo la densidad del aire en las condiciones de propagación y la presión atmosférica p, como para el aire $\gamma = 1{,}4$, podremos hallar

la celeridad del sonido. A 0°C y 1 atmósfera de presión, la densidad del aire es $\rho = 1{,}293$ kg/m^3, y como 1 atm $= 1{,}013 \times 10^5$ N/m^2, sustituyendo en la ecuación 12.9 estos valores se obtiene $v = 331$ m/s, resultado concordante con las medidas experimentales.

Si queremos hallar la variación de v con la temperatura, teniendo en cuenta la ecuación de estado para los gases perfectos

$$p\,V = \frac{m}{M} R\,T \qquad \text{o sea} \qquad p = \frac{\rho}{M} R\,T$$

tenemos

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R\,T}{M}$$

que sustituida en la ecuación 12.9 da

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}} \tag{12.10}$$

Para el aire puede considerarse una masa molecular media $M = 28{,}89$ al promediar para todos sus componentes, y entonces la ecuación 12.10 da

$$v = 20\,\sqrt{T}\ \text{m/s} \tag{12.11}$$

que a 20°C = 293°K da una celeridad de propagación de 340 m/s.

La variación de la celeridad del sonido con la temperatura es, en el aire, de unos 0,55 m/s por °C. Medidas precisas de la propagación del sonido en el aire dan, en aire puro y seco, a 1 atm de presión y a 0°C, el valor (331,45 $\pm$ 0,05) m/s, válido, en general, para todas las frecuencias audibles. La medida de la celeridad del sonido puede hacerse por métodos directos, determinando el tiempo que tarda un sonido puro en recorrer una distancia determinada, o por métodos indirectos determinando la longitud de onda y conociendo el período, sin más que aplicar

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{12.12}$$

Más adelante (fig. 12.4) veremos cómo determinar la longitud de onda.

En las fórmulas anteriores no se ha tenido en cuenta la humedad del aire. Cuando ésta aumenta, también lo hace la celeridad. También influye la proporción de anhídrido carbónico, así como la velocidad del viento, si bien esta última influencia es de carácter diferente. La velocidad aparente de las ondas sonoras aumenta si se

propagan en la misma dirección y sentido que el viento, pues ambas velocidades se componen.

Las ondas sonoras, por ser elásticas, se reflejan, refractan, interfieren y difractan. Podemos aplicar aquí lo dicho en el capítulo 11 y examinar algunos casos particulares.

La *reflexión* de las ondas sonoras es de observación corriente; basta pensar en el eco sonoro. Si emitimos un sonido y éste se refleja, oiremos el sonido reflejado como si procediese de un foco virtual simétrico del emisor respecto al plano del obstáculo (si lo consideramos plano) o al plano tangente al obstáculo en el punto de incidencia. Ahora bien, el oído puede distinguir dos sonidos recibidos con un intervalo mínimo de 0,1 s. Para intervalos inferiores, los sonidos se superponen y la audición no es neta. Por consiguiente, el eco será nítido si el obstáculo se halla a más de 17 m del observador, pues así el tiempo transcurrido entre emisión y recepción será $2 \times 17/340 = 0{,}1$ segundo.

A la *refracción* del sonido pueden aplicarse las mismas leyes que se indicaron en el § 11.7, y cuando el medio no es homogéneo, la trayectoria de la energía sonora se curvará de manera análoga a la indicada en la figura 11.9, cosa que puede ocurrir tanto en el aire como en el agua (percepción del sonido debido a un submarino). Este fenómeno es la causa de las zonas de silencio en la audición de explosiones lejanas, pues sucede que a cierta distancia del foco sonoro no se percibe la explosión, mientras sí se percibe en puntos mucho más alejados.

Las *interferencias* sonoras pueden ponerse de manifiesto con el *tubo de Quincke*, entre otros procedimientos, que es un tubo T que se bifurca según dos ramas M y N (fig. 12.3), una de las cuales (N) puede penetrar más o menos en la otra, alterando así su propia longitud. Los sonidos que se propagan por ellas se superponen en S, donde podrá lograrse interferencia constructiva o destructiva según cuál sea la diferencia de marcha de dichos sonidos. Si inicialmente son iguales los caminos, la interferencia en S es constructiva y la intensidad máxima. Variando la longitud de la rama móvil, el sonido se irá debilitando y pasará por un mínimo (interferencia destructiva) cuando la diferencia de caminos sea de media longitud de onda. De esta manera podremos calcular la longitud de onda e, indirectamente, la celeridad del sonido en el gas encerrado en el tubo. Si el sonido generado ante T no es puro, en una posición determinada sólo se elimina la frecuencia para la cual se cumple la condición de mínimo. De esta manera podemos «filtrar» las frecuencias que no nos interesen.

La superposición de ondas sonoras de frecuencias poco diferentes da lugar a *pulsaciones* acústicas. Se oye entonces un sonido que presenta máximos y mínimos de intensidad. En general, es un inconveniente en la música, si bien en ciertos casos, como por ejemplo en un órgano, puede dar lugar a efectos agradables.

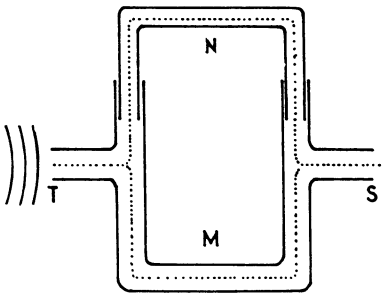


FIG. 12.3 Tubo de Quincke.

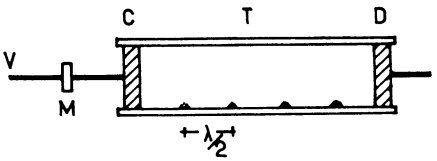


FIG. 12.4 Tubo de Kundt.

Para originar *ondas estacionarias* puede utilizarse el tubo de Kundt. Consiste en un tubo T cerrado en un extremo D por un émbolo (fig. 12.4). En el otro extremo tiene un émbolo C unido a un vástago V sujeto por su parte media M y que puede hacerse vibrar frotando longitudinalmente con un trapo espolvoreado con colofonia. Esta vibración produce una onda en la columna de aire del tubo, que se propaga hacia la derecha, se refleja en D e interfiere con la que llega, dando origen a ondas estacionarias si la longitud CD es igual a un número impar de cuartos de longitud de onda. Para observar los vientres y nodos se espolvorea la parte interna del tubo con polvo de licopodio y se regula la posición del émbolo D; en él debe haber un nodo. Los vientres y nodos pueden observarse fácilmente porque en la parte que no hay vibración se acumula el polvo, mientras desaparece en los lugares de vibración máxima. Midiendo la distancia entre vientres o entre nodos tenemos el valor de la mitad de la longitud de onda.

Si se quiere medir la celeridad de propagación de una onda sonora en un gas, se llena el tubo de Kundt con dicho gas (tras haber extraído el aire) y se determina λ en dicho gas por el procedimiento que acabamos de exponer. Si se ha determinado previamente la longitud de onda λ_a en el aire, la razón de la celeridad v_a de la onda en el aire a su celeridad v en el gas será

$$\frac{v_a}{v} = \frac{\lambda_a/T}{\lambda/T} = \frac{\lambda_a}{\lambda} \tag{12.13}$$

de donde podemos despejar v.

Los fenómenos de *difracción,* estudiados para las ondas en general, tienen gran importancia en la propagación de las ondas sonoras. La longitud de onda de una onda sonora de 340 Hz es igual a 1 m a 20°C, y la primera zona de Fresnel, a 1 m de distancia, tiene un radio $r = \sqrt{b\,\lambda} = 1$ m. Los obstáculos u orificios corrientes en el camino de las ondas sonoras producen difracción. Las ondas sonoras «bordean» el obstáculo para llegar al observador y, en estos casos, la propagación no es rectilínea. Esto hace que no podamos precisar la posición de un foco sonoro por la dirección de la onda recibida, como sucede a veces al oír un claxon en una esquina o desde el interior de un automóvil.

12.3 Efecto Doppler-Fizeau. Si viajando en ferrocarril nos cruzamos con otro que va haciendo sonar el silbato, percibimos el sonido de éste más agudo cuando se nos acerca el otro tren que cuando se aleja de nosotros. Esto significa que cuando se nos acerca el foco emisor llega a nuestro oído un sonido de frecuencia mayor que la emitida por aquél, mientras que al alejarse percibimos un sonido de frecuencia menor que la emitida. Este fenómeno no sólo se presenta en el caso de ondas sonoras, sino siempre que existe movimiento relativo entre un observador y un foco emisor de ondas, aunque éstas no sean sonoras. El fenómeno fue estudiado primeramente por los físicos CHRISTIAN DOPPLER (1803-1853) y H. L. FIZEAU (1819-1896) con ondas luminosas. Estudiemos la ley que lo rige.

Consideremos que el foco emisor F y el observador O vayan uno al encuentro del otro con velocidades de igual dirección y sentidos opuestos, siendo u y v_0 las celeridades respectivas medidas respecto a un sistema de referencia fijo (por ejemplo, el suelo). Representemos por v la celeridad de propagación de las ondas respecto al mismo sistema fijo (fig. 12.5).

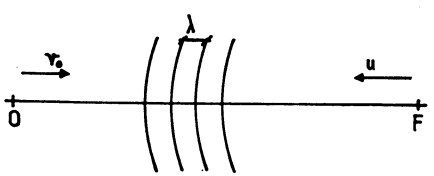


FIG. 12.5 Efecto Doppler-Fizeau.

Como el observador O se mueve con celeridad v_0 yendo al encuentro de las ondas y éstas se mueven con celeridad v yendo al encuentro del observador, la velocidad de las ondas relativa al observador será $v + v_0$, y representando por f' el número de ondas que percibe el observador en unidad de tiempo (frecuencia percibida), la longitud de onda medida por el observador O será

$$\frac{v + v_0}{f'} \tag{12.14}$$

ya que para él las cosas suceden como si estando parado le llegaran f' ondas por segundo con una celeridad $v + v_0$.

Por otra parte, el foco F emite f ondas por unidad de tiempo, las cuales se propagan con celeridad v, y como el foco se mueve en el mismo sentido con celeridad u, las cosas en él suceden como si las ondas emitidas se propagaran con una celeridad $v - u$. Así pues, la longitud de onda que mediría otro observador que se moviera junto con el foco F sería

$$\frac{v - u}{f} \tag{12.15}$$

Pero la longitud de onda no es más que la distancia recorrida por una onda durante un período de vibración y dicha distancia es independiente del sistema de referencia que utilicemos,* por tanto será la misma medida desde el sistema del observador que desde el del foco, lo que obliga a igualar las expresiones 12.14 y 12.15, o sea

$$\frac{v + v_0}{f'} = \frac{v - u}{f} \tag{12.16}$$

que es la ecuación que rige el efecto Doppler-Fizeau. Se comprende que si el foco F o el observador O se movieran en sentido contrario al supuesto, bastará considerar negativa su celeridad en la ecuación 12.16, y si uno de los dos estuviera en reposo su celeridad deberá tomarse igual a cero.

Si el foco y el observador se mueven con velocidades de direcciones cualesquiera, puede demostrarse que el resultado viene expresado por una ecuación análoga a la 12.16, en la que se sustituyen

* Si las celeridades que intervinieran fueran del mismo orden que la de la luz, la teoría de la Relatividad dice que dicha medida sí depende del sistema considerado, pero como suponemos celeridades inferiores a la del sonido, la cual es *mucho* menor que la de la luz, nuestra aseveración es válida.

las celeridades del observador y el foco por las componentes de sus velocidades según la recta que determinan O y F en el instante de la observación. Así pues, la frecuencia percibida depende de la dirección de dichas velocidades y de la posición relativa. Si en un instante las velocidades respectivas son perpendiculares a la recta OF, no habrá variación del tono. En cambio, ésta será máxima si el observador y el foco se mueven sobre una misma recta.

Ejemplo: Una embarcación navega hacia un acantilado vertical en dirección normal a él y al hacer sonar su sirena, cuya frecuencia es de 300 Hz, los tripulantes perciben 8 pulsaciones por segundo. Determinar la celeridad de la embarcación en el instante de hacer sónar su sirena, sabiendo que en las condiciones ambientes la celeridad de propagación del sonido es de 340 m/s.

Las ondas emitidas por la sirena se reflejan en la pared del acantilado y vuelven como si procedieran de un foco virtual situado simétricamente de la embarcación respecto al plano del acantilado y que emita a la frecuencia de 300 Hz. Podemos considerar, pues, este foco virtual como emisor que se mueve con la misma celeridad v_0 que la embarcación, yendo a su encuentro. Luego, en la ecuación 12.16, $u = v_0$, y despejando queda

$$v_0 = v\,\frac{f' - f}{f + f'}$$

Como el número de pulsaciones percibidas es igual a la diferencia de las frecuencias de los dos sonidos que se superponen, resulta $f' = 308$ Hz, y sustituyendo en la expresión obtenida tenemos

$$v_0 = 340\,\frac{8}{608} = 4{,}47 \text{ m/s}$$

12.4 Onda balística. Cuando el foco sonoro se desplaza con celeridad mayor que la del sonido v, el fenómeno es diferente. Sean F_1, F_2, F_3, ..., las posiciones sucesivas del foco F. En el instante en

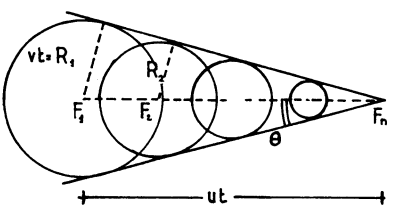


FIG. 12.6 Onda balística.

que el foco se halle en la posición F_n, la onda que emitió en la posición F_1 será una superficie esférica de radio $R_1 = v\,t$, siendo t el tiempo que tarda el foco en pasar de la posición F_1 a la posición F_n,

es decir, $t = F_1 F_n/u$. La onda emitida por el foco en su posición 2 será, cuando el foco está en F_n, una superficie esférica de radio $R_2 = v\ (F_2 F_n)/u$, etc., y en la posición F_n será este punto. La envolvente de estas ondas será una superficie cónica de vértice en la posición F_n y semiángulo dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{R_1}{F_1 F_n} = \frac{R_2}{F_2 F_n} = \ldots = \frac{v}{u}$$

El ángulo θ recibe el nombre de *ángulo de Mach*, y la razón u/v el de *número de Mach*. El ángulo de Mach sólo existe si el foco se mueve con celeridad superior a la de las ondas. En los puntos de la envolvente se produce un refuerzo de las ondas en virtud del principio de Huygens-Fresnel, y en los demás puntos no, debido a las interferencias destructivas. El frente de ondas mencionado recibe el nombre de *onda balística* y representa una acumulación de energía. Dará lugar a los siguientes fenómenos:

Un observador no percibe nada hasta ser alcanzado por la onda balística, o sea hasta que se halle sobre la superficie cónica. Si se encuentra sobre la trayectoria del foco no percibe nada hasta la llegada de éste.

Si el observador está próximo al vértice, percibe las ondas en orden inverso a su emisión. Es decir, la emitida en F_1 la recibe después que la emitida en F_2 y ésta después de la emitida en F_3, etc.

Un observador situado en las proximidades de la trayectoria de un avión supersónico percibe un chasquido seco cuando es alcanzado por la onda balística, ya que en ésta la acumulación de energía tiene poco espesor; de aquí que la variación sea muy brusca y el chasquido sea seco.

12.5 Producción de sonidos musicales. Los sonidos musicales se producen fundamentalmente por la vibración de las cuerdas, de las columnas de aire en los tubos sonoros, de las varillas, de las placas y de las membranas.

a) Cuerdas vibrantes. En Acústica se da el nombre de *cuerda* a un hilo elástico de dimensiones transversales pequeñas frente a su longitud, perfectamente flexible e inextensible. Los llamados *instrumentos de cuerda* basan su funcionamiento en las vibraciones de las cuerdas. Cuando se golpea, pulsa o frota una cuerda tensa con los extremos fijos, las perturbaciones se propagan hasta los extremos, en donde se reflejan invirtiendo su fase y disminuyendo muy poco su amplitud. Las ondas que se propagan tienden a producir, con las

reflejadas, un sistema de ondas estacionarias con nodos en los extremos. Para ello es necesario que la longitud de la cuerda sea igual a un número entero de semilongitudes de onda; de esta manera, los nodos son estables. Sólo persistirán las frecuencias que satisfagan esta condición. Éstas son las frecuencias propias de la cuerda y corresponden a las llamadas vibraciones libres o naturales de la misma. Si se aplicase una fuerza periódica, tendríamos vibraciones forzadas.

En la figura 12.7 representamos una cuerda tensa de longitud l sujeta por los extremos C y C' a sendos apoyos rígidos. Pulsando

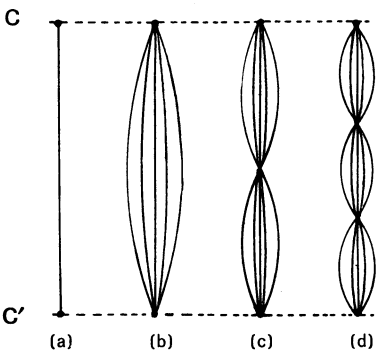


FIG. 12.7 Vibraciones naturales de una cuerda.

ligeramente la parte central, la cuerda vibrará de la manera más sencilla: la parte central será un vientre y sólo habrán dos nodos, uno en cada extremo. El desplazamiento irá disminuyendo hasta que la cuerda vuelve a su posición inicial, rebasa ésta y prosigue la vibración que, necesariamente, será amortiguada. En la figura 12.7 *b* hemos representado el aspecto de las posiciones sucesivas de la cuerda en su vibración. En este caso, la distancia entre nodos es igual a la longitud de la cuerda, o sea $\lambda/2 = l$. La frecuencia correspondiente será

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l} \tag{12.17}$$

que es la frecuencia del sonido fundamental o primer armónico.

Si fijamos el punto central (fig. 12.7 *c*), la onda más sencilla tendrá por nodos los dos extremos y este punto y la distancia entre nodos será igual a la mitad de la longitud de la cuerda. Esto nos da una longitud de onda mitad que en el caso anterior (fig. 12.7 *b*), por lo que la frecuencia correspondiente será doble (segundo armónico).

Fijando un punto distante de un extremo un tercio de la longitud de la cuerda, una manera posible de vibración será la representada en la figura 12.7 *d*, y en este caso la frecuencia correspondiente será el triple de la dada por la ecuación 12.17.

De una manera general, como siempre debe haber un nodo en cada extremo y la distancia entre nodos inmediatos es $\lambda/2$, cuando haya $n + 1$ nodos en total, dividirán la cuerda en n partes iguales cada una de ellas a $\lambda/2$, por lo que la longitud de la cuerda será

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{y la frecuencia será} \qquad f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2l} \tag{12.18}$$

siendo n un número natural. Estas frecuencias son las frecuencias propias de los modos de vibración. Sustituyendo en la ecuación 12.18 la ecuación 11.9 resulta

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\delta}} \tag{12.19}$$

donde F es la tensión y δ la masa por unidad de longiud de la cuerda. Dando a n los valores 1, 2, 3, ..., tenemos las frecuencias de los armónicos primero, segundo, tercero, etc., respectivamente. Pulsando en un punto donde podría estar situado un nodo eliminamos todos los armónicos que presentaran un nodo en dicho punto.

b) *Tubos sonoros.* Llamaremos así a recipientes cilíndricos, abiertos por un extremo (fig. 12.8 *a*) o por los dos (fig. 12.8 *b*), que generan sonidos al vibrar la columna de aire que contienen. Son la base de los instrumentos de viento, madera, órgano, etc. La vibración producida en un extremo da lugar a una onda longitudinal que origina compresiones y dilataciones a la columna de aire contenida en el tubo. La onda longitudinal se refleja en el extremo y al interferir con la onda incidente se forma un sistema de ondas estacionarias. Si el tubo está cerrado por un extremo, la reflexión tiene lugar con inversión de fase y en él tenemos un nodo para la onda de desplazamiento y un vientre para la onda de presión, ya que ésta presenta una diferencia de fase de 90° con la anterior (cfr. § 12.1). Refiriéndonos a la onda de desplazamiento, la forma más simple que adoptan las ondas estacionarias es un vientre en el extremo abierto del tubo y un nodo en el cerrado (fig. 12.8 *a*). En tal caso, la longitud del tubo es igual a la distancia entre un vientre y el nodo inmediato, o sea $l = \lambda/4$. La frecuencia correspondiente será

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l}$$

que es la correspondiente al armónico fundamental. Otro modo posible de vibración sería el que presentara un nodo en el extremo cerrado y otro a una distancia del extremo abierto igual a $l/3$ (figura 12.8 *a'*). En general, si en el interior del tubo hubiera n nodos (uno de ellos siempre en el extremo cerrado), ocuparían una longitud $n(\lambda/2)$, y como entre el último y el extremo abierto hay una distancia igual a $\lambda/4$, la longitud total del tubo será

$$l = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

y por tanto la frecuencia vendrá dada por

$$f = \frac{v}{\lambda} = (2n + 1)\frac{v}{4l} \qquad (12.20)$$

y dando a n los valores 0, 1, 2, ..., tendremos las frecuencias de todos los armónicos que puede emitir el tubo.

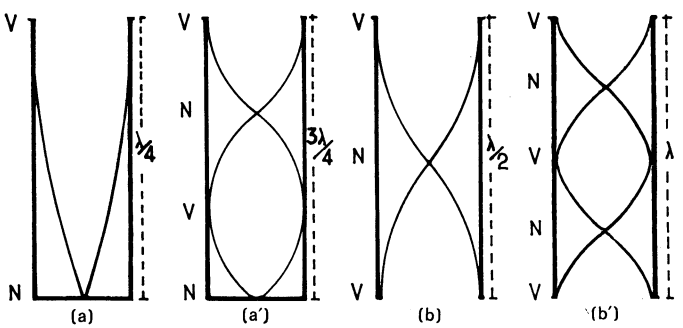


FIG. 12.8 Tubos sonoros, *a*) cerrado que da el armónico fundamental. *a'*) Cerrado que da el tercer armónico. *b*) Abierto que da el armónico fundamental. *b'*) Abierto que da el segundo armónico.

Si el tubo está abierto por los dos extremos, al originar una vibración en uno de ellos se propaga una onda longitudinal que se refleja en el otro sin inversión de fase. En ambos extremos, las ondas estacionarias que se formen deberán presentar: vientres las ondas de desplazamiento y nodos las de presión. Esto último se comprende

muy bien, pues al alcanzar las ondas el espacio abierto (ya no hay paredes) se anula la sobrepresión, lo cual corresponde a un nodo de la onda estacionaria de presión y a un vientre de la de desplazamiento que está en cuadratura de fase con la anterior.

Refiriéndonos a las ondas de desplazamiento, la forma más sencilla de las ondas estacionarias es la que presenta un vientre en cada extremo (fig. 12.8 b), y como la separación entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda, la longitud del tubo será $l = \lambda/2$, con lo que la frecuencia del sonido fundamental será

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\,l}$$

Otro modo sencillo de vibración posible es el representado en la figura 12.8 b'. En general, como debe haber un vientre en cada extremo, la longitud del tubo debe ser igual a un número entero de semilongitudes de onda $l = n\,\lambda/2$ y la frecuencia será

$$f = n\frac{v}{2\,l} \qquad (12.21)$$

De las ecuaciones 12.20 y 12.21 deducimos:

Un tubo abierto emite el sonido fundamental y todos los armónicos, es decir, la frecuencia de los armónicos es igual al producto del orden del armónico por la frecuencia del fundamental.

Un tubo cerrado emite el sonido fundamental y los armónicos impares, o sea que las frecuencias de los armónicos son múltiplos impares de la del fundamental.

La v de las ecuaciones 12.20 y 12.21 representa la celeridad de las ondas sonoras en el tubo. Para hallarla podemos aplicar la ecuación 12.10 o la ecuación 12.11.

Para excitar las vibraciones en los tubos puede hacerse de dos maneras. Una de ellas es utilizando una embocadura de flauta en donde se insufla aire que choca con un bisel agudo y parte sale al exterior, mientras el resto penetra en el tubo y origina variaciones periódicas de presión que excitan las vibraciones propias de la columna de aire del tubo. Otra es la embocadura de boquilla en la que hay una lengüeta que, al vibrar, ocasiona un paso intermitente de aire y por tanto fluctuaciones periódicas de presión.

c) *Varillas, placas y membranas.* Las varillas son cuerpos elásticos de longitud grande frente a sus dimensiones transversales. Pueden vibrar longi-

tudinalmente o transversalmente. Las vibraciones longitudinales presentan gran analogía con las de las columnas de aire. Si la varilla tiene un extremo fijo y el otro libre, en el primero habrá un nodo y en el otro un vientre. Si el punto fijo es el punto medio, en él hay un nodo y en los extremos sendos vientres. La longitud de onda se puede deducir teniendo en cuenta que la distancia entre un nodo y el vientre contiguo es $\lambda/4$, y para obtener la frecuencia se sustituirá λ en función de la longitud de la varilla en la relación $f = v/\lambda$, en donde v es la b de la ecuación 11.7.

Las vibraciones transversales pueden producirse por un desplazamiento o una percusión normal a la misma en las proximidades de un extremo libre. Doblando una varilla en forma de U y sujetándola por su parte central se obtiene un *diapasón*, el cual presenta el aspecto indicado en la figura 12.9. Al aplicarle una percusión en las proximidades de los extremos da lugar a una vibración transversal que origina una onda sonora muy pura, por lo que tiene mucha utilidad en la Acústica musical.

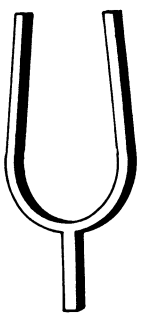


FIG. 12.9 Diapasón.

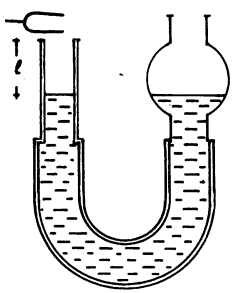


FIG. 12.10 Determinación de la celeridad del sonido.

Una membrana tensa también puede vibrar. Teóricamente, si fuese infinitamente delgada, la frecuencia del sonido fundamental sería independiente de las propiedades elásticas de la sustancia que la compone. Si la tensamos y sujetamos a un bastidor circular, dicha frecuencia resulta ser proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional al radio del bastidor. Si el espesor no es muy pequeño, la frecuencia depende más bien de las fuerzas elásticas que de la tensión y la membrana recibe el nombre de *diafragma*. Los diafragmas de los receptores telefónicos o de los micrófonos se excitan externamente y sus vibraciones son forzadas.

Las vibraciones de las membranas y de las placas elásticas son muy complicadas. Consideradas como cuerpos bidimensionales, las vibraciones que se propagan por ellos se reflejan en el contorno y el sistema de ondas estacionarias da lugar a líneas nodales en lugar de a nodos. Espolvoreando las placas con arena fina pueden ponerse de manifiesto las líneas nodales cuya forma podremos alterar fijando determinados puntos de la placa. Naturalmente, las líneas nodales pasarán siempre por éstos.

12.6 Resonancia acústica. La resonancia acústica constituye un caso particular de la resonancia mecánica (cfr. § 10.10) en el cual las vibraciones superpuestas al sistema son sonoras. En la vida corriente

se observan distintos fenómenos de resonancia acústica: el vidrio de una ventana es una placa cuya frecuencia fundamental depende, además de las constantes del vidrio, de sus tres dimensiones. Al pasar un camión por la calle puede originar vibraciones forzadas en dicha placa y si la frecuencia de la vibración originada coincide con la de la placa, ésta entra en resonancia, lo cual se traduce en una vibración de amplitud notable. Si sujetamos el vidrio con las manos, cambiamos la frecuencia propia de la placa y desaparece la resonancia. Si el cristal fuera muy delgado, podría romperse al superar cierto valor la amplitud de las vibraciones forzadas.

La resonancia puede comprobarse en un tubo cuya columna de aire tenga longitud variable. Esta variación de longitud puede lograrse en una probeta añadiendo o quitando agua. También podría lograrse en un tubo vertical abierto por los dos extremos. En tal caso se coloca en el extremo inferior (fig. 12.10) un tubo de plástico que comunica con un depósito que contiene agua; subiendo o bajando el depósito hacemos que varíe el nivel del líquido en el tubo y por tanto variamos la longitud de la columna de aire en el mismo. Colocando en la parte superior un diapasón que vibre, podemos notar que la columna de aire vibra y que la intensidad del sonido producido por dicha columna es máxima cuando la frecuencia del diapasón coincide con una de las frecuencias propias de la columna de aire, es decir, cuando la longitud de ésta sea múltiplo impar de un cuarto de la longitud de onda del sonido generado por el diapasón en las condiciones del experimento.

Para la frecuencia fundamental, $f = v/4\,l$. Conociendo la frecuencia con que vibra el diapasón y midiendo la longitud de la columna de aire en el tubo podemos hallar la celeridad de las ondas sonoras en las condiciones ambientes. Puede comprobarse que cuando se produce la resonancia las vibraciones del diapasón se amortiguan rápidamente. Ello se debe a que, en tales condiciones, la cesión de energía al aire es óptima.

Las cajas de madera que se colocan en el extremo de un diapasón o en los instrumentos musicales (violín, guitarra, por ej.) tienen por objeto reforzar los sonidos por resonancia y por ello se las conoce con el nombre de *cajas de resonancia*. También existen resonadores de frecuencias propias conocidas. Con ellos podemos analizar un sonido compuesto, pues sólo resonarán los correspondientes a las frecuencias de los sonidos componentes. Las cavidades de la boca, nasales, etc., juegan el papel de resonadores para las ondas sonoras producidas por la vibración de las cuerdas vocales.

Los fenómenos de resonancia acústica pueden observarse bien en

un piano. Produzcamos ante él un sonido que detengamos bruscamente. Las cuerdas cuyas frecuencias propias sean la del armónico fundamental y de los armónicos superiores contenidos en el sonido producido, actúan como resonadores y la mezcla de los sonidos que emiten reproduce el sonido que las ha excitado con su timbre. De una manera sencilla hemos realizado el análisis y la síntesis de un sonido.

12.7 Acústica fisiológica. Las ondas sonoras que llegan al oído externo originan variaciones de presión que dan lugar a vibraciones forzadas en una membrana, llamada *tímpano,* situada en la parte posterior del oído externo. Estas oscilaciones se transmiten por una cadena de huesecillos, situados en el oído medio, hacia el oído interno, en donde excita por resonancia las pequeñas fibras (de determinada longitud) de la membrana basilar, la cual está en contacto con las células terminales del nervio acústico que transmite al cerebro los impulsos recibidos. El oído actúa como un analizador de sonidos y percibe el sonido fundamental y los armónicos. En realidad, para percibir un sonido hace falta que la frecuencia sea la adecuada para producir resonancia en una o varias fibras de la membrana basilar y que la amplitud de las variaciones de presión sea suficiente para que la resonancia dé lugar a una sensación en el cerebro y que no sobrepase cierto valor, pues en tal caso la sensación sería desagradable e incluso dolorosa. De lo dicho se deduce que la percepción sonora está supeditada a factores individuales tales como defectos constitucionales o envejecimiento. En lo que sigue supondremos un oído normal.

A partir de diversas experiencias realizadas con numerosos individuos se ha podido establecer lo siguiente: si la frecuencia de la onda es inferior a 16 Hz no produce sensación audible y el movimiento ondulatorio recibe el nombre de *infrasonido.* Si la frecuencia supera los 20 000 Hz (inferior para muchas personas) tampoco se percibe y el movimiento ondulatorio se dice que es un *ultrasonido.* Para una frecuencia audible, la audición no tiene lugar hasta que la intensidad supere un cierto valor, llamado *valor umbral,* el cual depende de la frecuencia. Si la intensidad crece, aumenta la sensación sonora y si aquélla se hace suficientemente grande se llega al umbral doloroso o de intensidad máxima para la audición. En la figura 12.11 se han tomado en abscisas las frecuencias (a escala logarítmica) y en ordenadas las intensidades expresadas en W/cm^2 y las curvas más baja y más elevada corresponden a los umbrales mencionados.

Para la medida de la sensación sonora se utiliza la ley de Weber y Fechner. Esta ley psicofísica establece que las sensaciones son función lineal de los logaritmos de los estímulos. En nuestro caso podemos decir que la sensación sonora, también llamada *nivel de intensidad,* es función lineal del logaritmo de la intensidad del sonido recibido en el oído. Podemos escribir, pues,

$$S = A \log I + B$$

donde A y B son dos constantes que dependen de las unidades que adoptemos para la medida y del valor de la intensidad a la cual deja de percibirse sensación. Si a dicho valor umbral de la intensidad lo representamos por I_0 tendremos

$$0 = A \log I_0 + B \qquad \text{o sea} \qquad B = -A \log I_0$$

con lo que el nivel de intensidad será

$$S = A (\log I - \log I_0) = A \log \frac{I}{I_0}$$

Tomando $A = 1$, la unidad de nivel de intensidad recibe el nombre de *bel.* Resulta preferible tomar su décima parte, con lo cual $A = 10$ y el nivel de intensidad expresado en *decibel* (db) será

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{12.22}$$

El valor de la intensidad umbral I_0 resulta ser del orden de 10^{-16} W/cm^2, lo cual da idea de lo muy sensible que es el oído humano y la intensidad umbral de sensación dolorosa es alrededor de 10^{12} veces mayor, lo cual pone de manifiesto que el oído humano es uno de los instrumentos de más amplio dominio de funcionamiento que encontrarse pueda. No obstante, no es igualmente sensible a todas las frecuencias audibles. Imaginemos que tenemos un oscilador eléctrico, es decir, un generador de tensión eléctrica que varíe sinusoidalmente con el tiempo, el cual tenga dos botones de mando: uno para variar a voluntad la frecuencia de la tensión generada y otro para variar la potencia que se entrega a unos auriculares. Además, dispone de dos cuadrantes en uno de los cuales puede leerse la frecuencia y en el otro la potencia. Coloquemos los auriculares a un sujeto de experimentación e indiquémosle que reduzca la potencia (igual que cuando se reduce el «volumen» de sonido en un receptor

de radio o TV) hasta que deje de percibir sonido. Cuando ocurra esto, leemos la indicación de la potencia y obtenemos I_0. Supongamos que la frecuencia que estaba escuchando era de 300 Hz; sin tocar para nada el mando de intensidad (potencia) variemos la frecuencia a 1000 Hz, por ejemplo, y el sujeto de experimentación vuelve a percibir sonido. Esto se debe a que el oído es más sensible a 1000 Hz que a 300 Hz. Reduciendo de nuevo la intensidad hasta que deje de percibirse sonido, la indicación del instrumento de medida de la potencia nos permitirá conocer el *nuevo* valor de I_0, que es más bajo que el anterior. Si pasamos ahora a 2000 Hz, a 3000 Hz, etc., encontraremos los valores umbrales correspondientes a las diferentes frecuencias y podremos trazar en el diagrama de la figura 12.11 la curva más baja, la cual representa el umbral inferior de audibilidad.

Volvamos al sonido de 300 Hz y démosle una intensidad superior a la umbral correspondiente, con lo que habrá sensación sonora. Sin tocar para nada el mando de intensidad, variemos la frecuencia hasta 1000 Hz. Como el oído es más sensible a 1000 Hz que a 300 Hz, no nos extraña que el sujeto de experimentación perciba ahora mayor sensación de sonoridad que cuando el sonido tenía 300 Hz y la misma intensidad. Si quiere percibir el nuevo sonido con la misma sensación de sonoridad que el anterior, tendrá que reducir la intensidad. Para comparar sensaciones de sonoridad, lo haremos con relación a una frecuencia fija que se conviene en tomar igual a 1000 Hz. De esta manera, supongamos que disponemos ahora de dos osciladores, uno *V* de frecuencia variable, como el considerado anteriormente, y otro *F* de frecuencia fija, igual a 1000 Hz, aunque de intensidad ajustable a voluntad. Un oscilador manda sonido al auricular de la derecha y el otro al de la izquierda. El sujeto de experimentación ajusta la intensidad de *V* hasta lograr que el sonido percibido le dé la misma sensación de sonoridad que el sonido de 1000 Hz emitido por *F*. Es evidente que la intensidad dada por *V* no coincide con la dada por *F*, pues el oído tiene sensibilidad diferente a una frecuencia que a otra. No obstante, leyendo el valor de la intensidad del sonido de 1000 Hz, señalada por el correspondiente instrumento de medida de *F*, y dado que conocemos el valor umbral I_0 relativo a 1000 Hz, la ecuación 12.22 nos permite calcular el número de decibel correspondiente al sonido de 1000 Hz. Supongamos que sea 20: todos los sonidos que den la misma sensación de sonoridad que el de 1000 Hz considerado, cualquiera que sea su frecuencia, se dice que tienen una sonoridad de 20 *fon*. Debe comprenderse que si se sustituyera en la ecuación 12.22 el valor de I señalado en *V* y el de I_0 correspondiente a la frecuencia dada por *V*, el resultado no coincidiría exactamente

con 20 db. Un sonido de 300 Hz y 20 db se percibiría más débil que el de 1000 Hz y 20 db por ser menos sensible el oído a 300 Hz que a 1000 Hz. Así pues, manteniendo F en 20 db y variando V en frecuencia y en intensidad de manera que siempre se tenga igual sensación de sonoridad que la que da F, trazaremos la curva de 20 fon de la figura 12.11. En forma análoga trazaríamos las curvas de 40 fon,

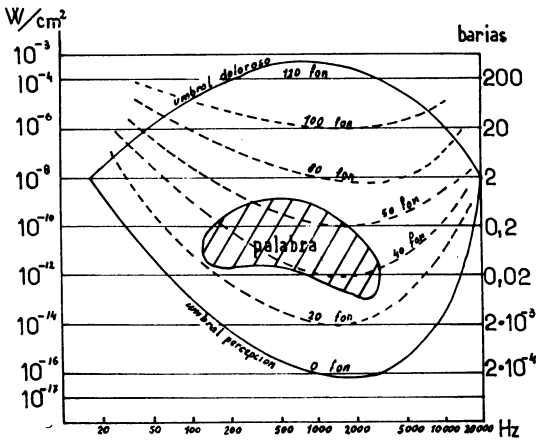


FIG. 12.11 Curvas isofonas.

60 fon, etc., las cuales reciben el nombre de curvas de igual sensación de sonoridad o *isofonas*. Resumiendo: *el número de fon de un sonido es igual al número de decibel de un sonido de frecuencia 1000 Hz que dé la misma sensación de sonoridad.*

En la figura 12.11 se han representado las curvas isofonas y el dominio aproximado de una conversación corriente, que es de unos 40 fon, lo cual corresponde a una intensidad 10^4 veces mayor que la umbral, de lo que deducimos que se habla con una intensidad muy superior a la estrictamente necesaria para que el sonido pueda percibirse. En la parte central de las curvas, la variación con la frecuencia es pequeña y por tanto el error que se cometa al confudir el fon con el decibel no será considerable. La posición de los mínimos nos indica que el oído tiene su sensibilidad máxima a frecuencias próximas a los 2500 Hz.

Para tener una idea aproximada de las sonoridades corrientes y de las intensidades correspondientes, se dan en la tabla 12.1 los valores correspondientes a distintos agentes sonoros.

TABLA 12.1

	Sonoridad, fon	*Intensidad, W/cm²*
Umbral de audibilidad . . .	0	10^{-16}
Murmullo de las hojas . . .	10	10^{-15}
Conversación	40	10^{-12}
Ruido del metro	90	10^{-7}
Avión próximo	120	10^{-4}
Sonoridad dolorosa	130	10^{-3}

Además del procedimiento subjetivo descrito anteriormente para la medida de la sonoridad, existe el procedimiento electroacústico, consistente en traducir las variaciones de presión de la onda sonora que deseamos medir en corriente eléctrica por medio de un micrófono. La corriente eléctrica, convenientemente amplificada, se lee en un instrumento de medida calibrado previamente en fon. Estos aparatos se llaman *sonómetros.*

12.8 Infrasonidos y ultrasonidos. Ya hemos indicado al principio del § 12.7 que cuando la frecuencia de un movimiento ondulatorio similar al sonido es inferior a 16 Hz, se dice que se trata de una onda infrasonora. Los infrasonidos se perciben por las variaciones de presión que originan y pueden medirse traduciendo las variaciones de presión en corriente eléctrica con un aparato parecido al sonómetro. Se generan infrasonidos intensos en las explosiones, en las erupciones volcánicas, al arrastrar un cuerpo pesado, etc. Al cerrar bruscamente una puerta se origina un infrasonido débil y puede observarse un efecto debido al mismo consistente en la vibración de un vidrio mal ajustado en una ventana.

Si la frecuencia de vibración supera los 20 000 Hz, se dice que la onda es ultrasonora. Los ultrasonidos se producen generalmente por medio de un cristal de cuarzo que entra en oscilación por resonancia con un campo eléctrico que se aplica al cuarzo al establecer una diferencia de potencial alterna entre unos electrodos metálicos entre los cuales está colocada la lámina de cuarzo. Se puede llegar a obtener frecuencias de hasta 5×10^8 Hz. Para determinar la celeridad de los ultrasonidos en un gas, en particular en el aire, puede emplearse el método de las ondas estacionarias, como en el tubo de Kundt. Se encuentra que a frecuencias elevadas la celeridad depende de la frecuencia y para ellas la absorción de la onda es considerable. En los líquidos, la absorción aumenta extraordinariamente con la frecuencia. Como ejemplo, diremos que en el agua, un ultrasonido de 4×10^4 Hz recorre 40 km antes de que su intensidad se reduzca a 1/50 de su valor en la emisión. En cambio, a 10^6 Hz esta distancia vale solamente 74 cm. Durante la Guerra Mundial 1914-18, el físico francés LANGEVIN ideó un procedimiento de detección de submarinos por medio de ultrasonidos. En la actualidad, éstos se utilizan para detección de obstáculos en el agua, para sondeos, etc. Para ello se emplea el método de

los ecos, cosa que ya se había hecho con los sonidos, emitiendo un pulso ultrasonoro que choca contra un obstáculo, se refleja y se detecta al recibirse en el propio emisor, pues provoca el fenómeno inverso, es decir, al llegar el pulso ultrasonoro da origen en el cuarzo a un pulso eléctrico que puede registrarse fácilmente y determinar el tiempo transcurrido entre la emisión y la recepción del ultrasonido y si conocemos su celeridad en el agua en las condiciones del experimento, podemos determinar la distancia.

Entre otras aplicaciones de los ultrasonidos, indicaremos la auscultación de obras de hormigón o piezas de fundición. Los ultrasonidos se propagan por el medio en estudio y al recibirlos puede apreciarse la homogeneidad y los defectos del material. En soldadura, al aplicar ultrasonidos se destruye la delgada capa de óxido que recubre las superficies y facilita la soldadura del aluminio y diversas aleaciones que, en el curso de la operación, suelen recubrirse de una capa de óxido refractario. En Fisicoquímica y en Biología tienen también numerosas aplicaciones, tales como la coagulación de los aerosoles y la esterilización de la leche y de ciertos medicamentos.

12.9 Acústica arquitectónica. Los problemas de la Acústica de salas pueden dividirse en dos categorías generales: aislamiento de sonidos y vibraciones exteriores a la sala y acondicionamiento de ésta para percibir en forma adecuada sonidos generados en su interior. En este apartado nos vamos a ocupar únicamente de esta última clase de problemas.

Consideremos en una sala un orador *O* que pronuncia una sílaba y un auditor *A* que la recibe. La sílaba la emite *O* en un tiempo corto pero finito y alcanza al auditor *A* por la vía directa en primer lugar, si bien antes de finalizar el tiempo de duración de la sílaba ésta sigue llegando al oído tras múltiples reflexiones en las distintas superficies que limitan el interior de la sala. Esto hace que la intensidad del sonido se refuerce, pues se superponen en el oído las ondas que llegan directamente y tras múltiples reflexiones, aportando energía todas ellas. Terminado el tiempo de duración de la sílaba, deja de llegar el sonido por vía directa (lo cual entraña una disminución de la intensidad) y siguen llegando ondas reflejadas, desapareciendo primeramente las que han recorrido menor longitud y gradualmente las demás, hasta que la intensidad se hace inferior a la umbral. Este fenómeno lleva el nombre de *reverberación*. Puede demostrarse que tanto la elevación de la intensidad del sonido como su posterior disminución son funciones exponenciales del tiempo.

De lo expuesto se desprende que la reverberación presenta un aspecto positivo para la Acústica de una sala, cual es reforzar la intensidad del sonido. Por eso, para hacernos oír al aire libre tenemos que esforzarnos más que para lograr igual fin en el interior de un local. No obstante, también presenta un aspecto negativo: si la persistencia del sonido en el oído del auditor *A* es grande y el orador O

pronuncia varias sílabas seguidas, podrá ocurrir que llegue al oído la segunda y tal vez la tercera cuando aún se esté percibiendo la primera. Las sílabas cabalgan unas sobre otras y la palabra resulta entonces poco inteligible. Las iglesias antiguas están construidas de manera que posean una gran reverberación a fin de que el predicador pudiera hacerse oír bien de los feligreses en aquellos tiempos en que no se disponía de equipos amplificadores. Aprovechaban así el aspecto positivo de la reverberación. Pero para obviar el negativo, se veían obligados a hablar separando mucho las sílabas. De ahí el estilo ampuloso de los viejos predicadores.

En cada reflexión del sonido, parte de la energía que transporta la onda sonora es absorbida por la superficie reflectora y el resto se refleja. Llamamos *coeficiente de absorción* α de la superficie reflectora a la fracción de la energía incidente que absorbe. Así pues, llamando I_0 a la intensidad de la onda sonora incidente e I_1 a la de la reflejada, será

$$I_1 = I_0 - I_0\,\alpha = I_0\,(1-\alpha) \qquad \text{siendo} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Este coeficiente de absorción no tiene nada que ver con el β definido en el § 11.5 y que correspondería a la absorción del sonido por parte del aire y de la que podemos prescindir por el momento. El coeficiente α depende de la naturaleza de la superficie reflectora y en la tabla 12.2 pueden verse algunos valores. Como en una sala existirán

TABLA 12.2. COEFICIENTES DE ABSORCIÓN

Material	*Frecuencia, Hz*					
	125	250	500	1000	2000	4000
Pared de ladrillo	0,05	0,04	0,02	0,04	0,05	0,05
Hormigón	0,02	0,02	0,02	0,04	0,05	0,05
Suelo de madera	0,02	0,04	0,05	0,05	0,10	0,05
Madera contraplacada ½ pulg. espesor, fijada a 3 cm de la pared	0,35	0,20	0,15	0,10	0,05	0,05
Placas corcho 1 pulg. espesor .	0,05	0,10	0,20	0,55	0,60	0,55
Losas acústicas ½ pulg. adheridas a la pared	0,10	0,20	0,40	0,50	0,45	0,50
Poderes absorbentes, m²						
Persona sentada	0,16	0,33	0,44	0,48	0,47	0,43
Asiento de madera desocupado	0,007	0,012	0,015	0,015	0,018	0,020

multitud de superficies reflectoras diferentes, para simplificar el cálculo tomaremos la media ponderada $\bar{\alpha}$ de los coeficientes de absorción presentes y consideraremos que todas las superficies reflectoras tienen este coeficiente de absorción medio

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots}{S_1 + S_2 + \ldots} \tag{12.23}$$

donde S_1 es el área de la superficie cuyo coeficiente de absorción es α_1, S_2 la de aquella que posee el coeficiente de absorción α_2, etc. Al producto $\alpha_i S_i$ se le da el nombre de *poder absorbente* de la superficie de área S_i, y como α_i es un número abstracto, se medirá en m². En los países de habla inglesa es corriente medirlo en *sabine*, lo que corresponde a medir la superficie en pies cuadrados.

Por otra parte, en una sala de forma cualquiera, la onda sonora sufrirá multitud de reflexiones, dada la magnitud de la celeridad del sonido, y los tramos recorridos entre reflexiones sucesivas tienen longitudes muy variadas. El cálculo demuestra que su valor medio, al que se da el nombre de *recorrido libre medio*, vale

$$L = \frac{4V}{S} \tag{12.24}$$

donde V es el volumen de la sala y $S = \Sigma S_i$ es el área de la superficie reflectora total, expresado en m³ y m², respectivamente.

El gran número de reflexiones nos permite realizar un estudio estadístico de la disminución de la intensidad del sonido, empleando los valores definidos por las ecuaciones 12.23 y 12.24. Veamos: Llamando I_0 a la intensidad del sonido antes de realizar la primera reflexión, inmediatamente después de ésta será, según indicamos antes,

$$I_1 = I_0 (1 - \bar{\alpha})$$

y tras la segunda

$$I_2 = I_1 (1 - \bar{\alpha})$$

y análogamente

$$I_3 = I_2 (1 - \bar{\alpha})$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n = I_{n-1} (1 - \bar{\alpha})$$

de donde, tras n reflexiones, tendremos

$$I_n = I_0 (1 - \bar{\alpha})^n \tag{12.25}$$

y el camino recorrido por la onda sería

$$n L = v t$$

que en virtud de la ecuación 12.24 será

$$n = \frac{v S}{4 V} t \tag{12.26}$$

y sustituyendo en la ecuación 12.25 y suprimiendo el subíndice n queda

$$I = I_0 (1 - \bar{\alpha})^{(vS/4V)t} \tag{12.27}$$

y tomando logaritmos

$$\ln \frac{I}{I_0} = \frac{v S t}{4 V} \ln (1 - \bar{\alpha}) = -\delta t \tag{12.28}$$

donde

$$\delta = \frac{v S}{4 V} \ln \frac{1}{1 - \bar{\alpha}} \tag{12.29}$$

resulta, pues

$$I = I_0 e^{-\delta t}$$

lo cual pone de manifiesto el decrecimiento exponencial de I.

Para medir la rapidez de este decrecimiento definiremos el *tiempo de reverberación* T como el tiempo que ha de transcurrir para que la intensidad de un sonido se reduzca a su millonésima parte. Es decir, haciendo $I/I_0 = 10^{-6}$ en la ecuación 12.28 obtenemos

$$\ln 10^{-6} = -13{,}8 = \frac{v S T}{4 V} \ln (1 - \bar{\alpha})$$

y sustituyendo $v = 344$ m/s, resulta

$$T = -\frac{0{,}16 V}{S \ln (1 - \bar{\alpha})} \text{ segundos} \tag{12.30}$$

que es la *fórmula de Eyring* para el tiempo de reverberación.

El Análisis Matemático enseña que el logaritmo neperiano puede desarrollarse en serie, dando

$$\ln (1 - \bar{\alpha}) = -\left(\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}^3}{3} + \ldots \right)$$

y si $\bar{\alpha}$ es suficientemente menor que la unidad podremos despreciar frente al primer término todos los demás, quedando

$$\ln\ (1 - \bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación 12.30 queda la *fórmula de Sabine*

$$T = 0{,}16 \frac{V}{S\,\bar{\alpha}} = 0{,}16 \frac{V}{\Sigma\,\alpha_i\,S_i}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación 12.23.

En todo lo anterior no se ha tenido en cuenta la absorción del sonido por parte del aire, la cual resulta tanto más importante cuanto más elevada sea la frecuencia. Además, en una sala grande el recorrido libre medio L (ecuación 12.24) es mayor que en una sala pequeña, por lo que en ésta el número de reflexiones por segundo será mayor y por tanto prevalecerá, en gran manera, la absorción en las reflexiones sobre la absorción por el aire. Todo ello conduce a modificar el coeficiente de absorción medio $\bar{\alpha}$ agregándole un término $m\,L$, con lo que deberá tomarse, en lugar de aquél, otro coeficiente $\alpha' = \bar{\alpha} + m\,L$. Donde m es una constante que depende, por una parte, de los efectos de viscosidad y de conductibilidad calorífica del aire, y por otra, de la absorción molecular y de los intercambios energéticos de las moléculas al chocar entre sí.

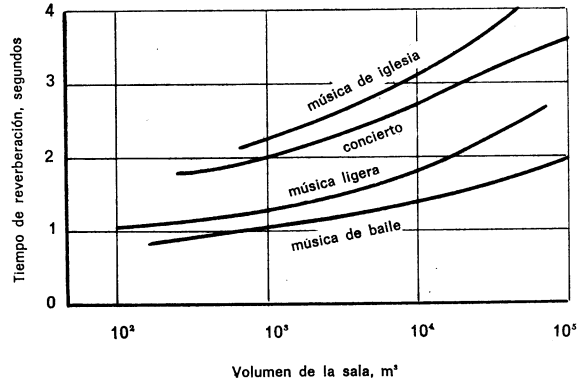


FIG. 12.12 Tiempos de reverberación óptimos.

Se comprende que el tiempo de reverberación óptimo dependerá del fin a que se destine la sala. Una sala de conferencias, por ejemplo, no deberá tener un tiempo de reverberación, para frecuencias medianas, mucho mayor que un segundo, con el fin de que la palabra sea bien inteligible. En cambio, la música de órgano puede admitir tiempos de reverberación del orden de los 4 segundos y aun mayores. También el volumen de la sala influye en dicho

tiempo de reverberación. En todo caso, el valor óptimo es algo totalmente subjetivo y por ello en los Estados Unidos se considera conveniente que a frecuencias del orden de 100 Hz el tiempo de reverberación sea un 50 % mayor que a 500 Hz. En Europa se prefiere mantener un tiempo de reverberación lo más constante posible a todas las frecuencias. En Estados Unidos admiten esto para frecuencias de 500 Hz en adelante. En la figura 12.12 pueden verse tiempos de reverberación óptimos para distintos volúmenes de la sala y distintas utilizaciones de la misma.

Para ajustar el tiempo de reverberación de una sala al valor óptimo, basta agregar o suprimir superficies de material muy absorbente, tales como alfombras, cortinas, etc. Los cambios en la moda femenina han obligado a dotar muchas salas de concierto de pesadas cortinas de terciopelo, las cuales pueden suprimirse en caso de un cambio de la moda que incremente la cantidad de ropa de las espectadoras.

13

Estática de fluidos. Fenómenos interfaciales

Sabemos que la materia está constituida por *moléculas,* que son las porciones más pequeñas que pueden tenerse conservando aún las propiedades materiales. En los sólidos, estas moléculas sólo pueden vibrar con pequeña amplitud en torno a posiciones fijas que determinan un reticulado tridimensional, estando siempre muy próximas entre sí las moléculas vecinas. En los líquidos, las moléculas ya no oscilan en torno a posiciones fijas, sino que se mueven más o menos libremente, pero su concentración (número de ellas por unidad de volumen) es relativamente grande. Ello hace que entre ellas se ejerzan fuerzas atractivas de *cohesión* que tienen como resultado que el líquido ocupe un volumen propio determinado, si bien la forma de éste es siempre la del recipiente que contiene el líquido. Por último, en los gases la concentración de las moléculas es tan baja que no existen fuerzas atractivas entre ellas, ya que, por término medio, las distancias entre una molécula y las más próximas son tan grandes que cualquier atracción entre ellas resulta totalmente despreciable. Por eso una masa de gas puede ocupar un volumen cualquiera, no tiene volumen propio, sino el del recipiente que lo contenga, al cual llena en su totalidad.

En el estudio que vamos a realizar a continuación no vamos a considerar el aspecto molecular de la materia, sino que la estudiaremos desde su punto de vista macroscópico, considerándola como un medio continuo.

13.1 Fluidos. Cuando para deformar un material, sin alterar su volumen, no sea necesaria fuerza alguna, diremos que dicho material es un fluido. En esta categoría entran los gases y los líquidos, pues, al menos aproximadamente, son incapaces de resistir a esfuerzos tangenciales (cortantes) y podemos deslizar una porción de líquido o gas

sobre otra sin que la primera arrastre a la segunda. Más adelante (§ 14.6) se considerará este efecto de arrastre que no siempre es despreciable cuando el fluido está en movimiento, pero del que podemos prescindir cuando se halle en reposo.

En este capítulo vamos a estudiar el equilibrio de los fluidos y podemos idealizar los gases y líquidos considerándolos, en principio, *fluidos perfectos,* es decir, que en su seno no existen nunca esfuerzos tangenciales.

13.2 Presión en el seno de un fluido. Consideremos un punto P en el seno de un fluido en reposo y sea dS un elemento de superficie en P orientado de cualquier manera. La fuerza $\mathbf{dF}$ que se ejerce sobre dS deberá ser normal a dicha superficie, pues, de no ser así, como el fluido no puede soportar esfuerzos tangenciales, no podría estar en reposo y deslizaría sobre dS, contra la hipótesis. El esfuerzo *normal* $p = dF/dS$ recibe el nombre de *presión* en el punto P y vamos a demostrar que es independiente de la orientación del elemento de superficie.

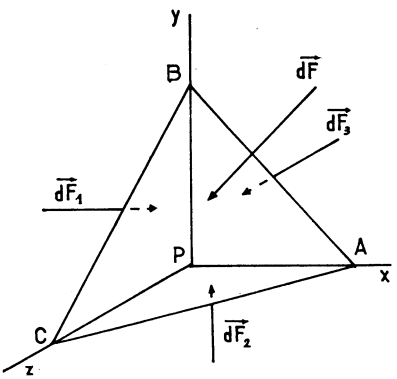


FIG. 13.1 Presión en un punto.

Para ello tomemos con origen en P una terna cualquiera de ejes coordenados cartesianos rectangulares $Pxyz$ y cortémosla por un plano ABC. Con lo que nos quedará determinado un tetraedro $PABC$ (fig. 13.1). Las áreas de sus caras son

la de PBC,	dS_1
la de PCA,	dS_2
la de PAB,	dS_3
la de ABC,	dS

y como las tres primeras son las proyecciones de la cuarta sobre los planos coordenados, se tendrá

$$dS_1 = dS \cos \alpha \qquad dS_2 = dS \cos \beta \qquad dS_3 = dS \cos \gamma \tag{13.1}$$

donde α, β y γ son los ángulos que forma la normal a dS con los tres ejes.

Llamando p_1 al valor de la presión sobre la cara *PBC*, p_2 al correspondiente a *PAC*, p_3 al de *PAB* y p a la presión sobre la cara *ABC*, las fuerzas que se ejercen sobre estas caras serán, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned} dF_1 &= p_1\, dS_1 \\ dF_2 &= p_2\, dS_2 \\ dF_3 &= p_3\, dS_3 \\ dF &= p\, dS \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

y por lo dicho anteriormente, son normales a las caras respectivas. Además de estas fuerzas, pueden ejercerse sobre el tetraedro otras proporcionales a su masa dm (por ejemplo, el peso) que representaremos por $\mathbf{g}\, dm$. El vector $\mathbf{g}$ representa la fuerza por unidad de masa y en el caso de no existir más *fuerzas másicas* que el peso coincidiría con el campo gravitatorio.

Es evidente que si sustituimos el tetraedro fluido por un tetraedro sólido de iguales dimensiones, la distribución de las presiones en el resto del fluido no se verá alterada y, en particular, las presiones sobre sus caras serán las mismas. El equilibrio del tetraedro obedecerá, pues, a las leyes de la Estática del sólido y deberá cumplirse:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{13.3}$$

La primera de las ecuaciones 13.3 se escribe en la forma

$$p_1\, dS_1 - p\, dS \cos \alpha + g_x\, dm = 0 \tag{13.4}$$

Ahora bien, si es ρ la densidad en el tetraedro, su masa será

$$dm = \rho \tfrac{1}{3} h\, dS \tag{13.5}$$

donde h es la altura correspondiente al vértice P. Por otra parte, dS_1 es el área de la proyección de la cara *ABC* sobre el plano *Pyz*, y por tanto tendremos

$$dS_1 = dS \cos \alpha \tag{13.6}$$

y sustituyendo las ecuaciones 13.5 y 13.6 en la ecuación 13.4 obtenemos

$$p_1\,dS\cos\alpha - p\,dS\cos\alpha + g_x\tfrac{1}{3}\rho h\,dS = 0$$

y dividiendo ambos miembros por dS resulta

$$\text{análogamente:}\quad \left.\begin{aligned} p_1\cos\alpha - p\cos\alpha + g_x\tfrac{1}{3}\rho h &= 0\\ p_2\cos\beta - p\cos\beta + g_y\tfrac{1}{3}\rho h &= 0\\ p_3\cos\gamma - p\cos\gamma + g_z\tfrac{1}{3}\rho h &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.7)$$

donde las dos últimas ecuaciones 13.7 se obtendrían de manera análoga al escribir las dos últimas ecuaciones 13.3.

Las ecuaciones 13.7 constituyen relaciones que deben cumplir las presiones sobre las superficies que pasan por P y están orientadas según los planos coordenados y la presión sobre una superficie ABC cuya normal forma con los ejes de coordenadas los ángulos α, β y γ. Si manteniendo constantes estos ángulos hacemos tender a cero h, p tendería a la presión sobre una superficie que pase por P y tenga la misma orientación que ABC. Pero al tender h a cero, las ecuaciones 13.7 se reducen a

$$p_1 = p_2 = p_3 = p \qquad (13.8)$$

que nos dice que el valor de la presión en un punto P es el mismo para todos los elementos de superficie que contengan P, cualesquiera que sean α, β y γ, es decir, cualquiera que sea su orientación, como queríamos demostrar.

13.3 Equilibrio de un fluido en el campo de la gravedad. Vamos a considerar ahora el caso de un fluido sometido solamente a la acción de la gravedad. Tomemos como sistema de referencia una terna de ejes coordenados cartesianos rectangulares tal que Oz sea vertical y su sentido positivo opuesto al de $\mathbf{g}$. En el seno del fluido consideremos un paralelepípedo rectángulo de aristas paralelas a los ejes de coordenadas y cuyas longitudes sean Δx, Δy, Δz (fig. 13.2). Este paralelepípedo, si el fluido está en reposo, puede considerarse sólido y de la misma densidad sin que ello afecte a la distribución de presiones. Se halla sometido a su propio peso $g\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ y a las siguientes fuerzas de presión sobre sus caras:

Sobre la cara $ABCD$, $\quad p_1\,\Delta y\,\Delta z$

$EFGH$, $\quad -p_1'\Delta y\,\Delta z$

$AECG$, $\quad p_2\,\Delta x\,\Delta z$

$$BFDH, \quad -p_2'\Delta x\,\Delta z$$
$$CDGH, \quad p_3\,\Delta x\,\Delta y$$
$$ABEF, \quad -p_3'\Delta x\,\Delta y$$

Estando en equilibrio, deberá cumplirse

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad (p_1 - p_1')\,\Delta y\,\Delta z = 0$$
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad (p_2 - p_2')\,\Delta x\,\Delta z = 0$$
$$[\Sigma F_z = 0] \qquad (p_3 - p_3')\,\Delta x\,\Delta y - g\,\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = 0$$

de donde resulta

$$p_1 = p_1' \qquad p_2 = p_2' \qquad p_3' - p_3 = -g\,\rho\,\Delta z \tag{13.9}$$

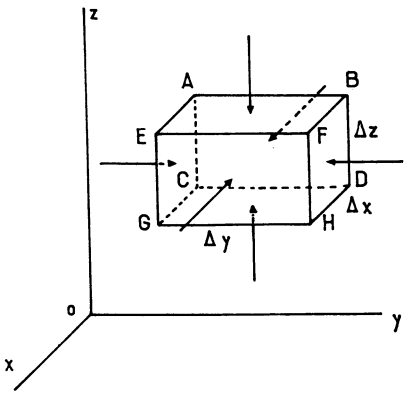


FIG. 13.2

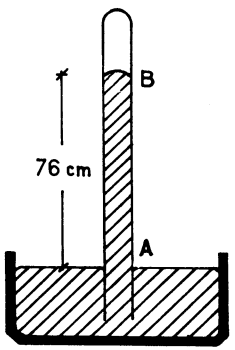


FIG. 13.3 Barómetro de Torricelli.

Las dos primeras de las ecuaciones 13.9 nos dicen que *en todos los puntos de un mismo nivel existe la misma presión*; ésta sólo varía con la coordenada z, y haciendo tender a cero Δz, la tercera de las ecuaciones 13.9 se convierte en

$$dp = -\rho\,g\,dz \tag{13.10}$$

que constituye la ecuación de la Estática de los fluidos en el campo de la gravedad.

Si se tratara de un fluido incompresible, ρ es constante y la ecuación 13.10 nos da, al integrar,

$$p_1 - p_2 = \rho\,g\,(z_2 - z_1) = \rho\,g\,h \tag{13.11}$$

donde h es la diferencia de niveles entre los puntos cuyas presiones son p_2 y p_1, siendo el primero el más elevado. Ésta será, pues, la ecuación a utilizar en el caso de los líquidos, pues éstos son prácticamente incompresibles.

Si los fluidos son compresibles, para conocer la diferencia de presiones entre dos puntos, o sea para integrar la ecuación 13.10, será necesario conocer la variación de la densidad ρ con la altura o con la presión.

13.4 Medida de la presión de un gas. La atmósfera constituye, quizás, el ejemplo más interesante de distribución de presiones en un fluido compresible. Son múltiples las causas que influyen en la variación de la densidad con la altura e incluso con el tiempo. Así, en la superficie terrestre y al nivel del mar, la *presión atmosférica* varía de unos instantes a otros alrededor de un valor de $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2. Esta presión puede tomarse como unidad de medida y recibe el nombre de *atmósfera*. Equivale a la presión que ejerce en su base una columna de mercurio de 760 mm de altura, encima de la cual se tenga el vacío. Fue TORRICELLI quien lo experimentó por primera vez al introducir un tubo de vidrio completamente lleno de mercurio en una cubeta que contenía mercurio y observar que dentro del tubo descendía el líquido hasta formar una columna de 76 cm de altura. Como no podía haber penetrado aire, la cámara observada sobre B (fig. 13.3) debía estar totalmente vacía y ser nula la presión; luego la diferencia de presiones entre B y A sería la presión existente en A y en todos los puntos a su mismo nivel y aplicando la ecuación 13.11, siendo ρ la densidad del mercurio, resulta el valor citado anteriormente. Adosando una escala al tubo del dispositivo de la figura 13.3 tenemos el llamado *barómetro de Torricelli.*

Como las variaciones de presión hacen variar el nivel de la superficie libre del mercurio en la cubeta, el desnivel entre dicha superficie libre y el extremo de la columna sería difícil de medir con precisión. Para salvar esta dificultad, FORTIN hace coincidir siempre el cero de la escala con el nivel de la cubeta ajustando con un tornillo el fondo de la cubeta, que es de gamuza. Haciéndolo subir o bajar, logra que la superficie libre quede tangente a la punta de un índice fijo de marfil colocado de manera que en estas condiciones el nivel de la superficie libre coincida con el cero de la escala.

El barómetro de *escala compensada* de TONNELOT tiene las divisiones de la escala de un tamaño tal que compensa las lecturas al variar el nivel de la superficie libre en la cubeta a causa de los ascensos o descensos del mercurio en el tubo. Así, si es s la sección del tubo

y S la de la cubeta, un ascenso h en el tubo origina un descenso H en la cubeta y el verdadero desnivel es $h + H$. Pero como el volumen del mercurio es constante, deberá ser

$$s\,h = S\,H \qquad \text{o sea} \qquad \frac{h}{H} = \frac{S}{s}$$

de donde

$$\frac{h + H}{h} = \frac{S + s}{S}$$

En esta ecuación, h corresponde a lo que se lee sobre la escala y $h + H$ a lo que debería leerse. Luego si cada división de la escala es de $S/(S + s)$ cm en vez de 1 cm, una variación de h divisiones señalará $h + H$ centímetros, que es el verdadero desnivel. Por ejemplo: si los diámetros del tubo y la cubeta están en la razón 1/10, las secciones estarán en la 1/100 y las divisiones de la escala deberán tener una longitud de 100/101 cm. Considerando las divisiones como si fueran de 1 cm, la lectura nos da directamente el desnivel en centímetros.

En todos estos barómetros hay que corregir la disminución de densidad del mercurio que se presenta con la elevación de temperatura, la dilatación de la escala, el menisco del mercurio y otras correcciones de menor importancia.

El barómetro *aneroide,* más cómodo de manejo que los de mercurio, consta de una caja metálica, o de una serie de cajas unidas una a continuación de otra, llamadas *tubos de Bourdon* (*B* en la fig. 13.4),

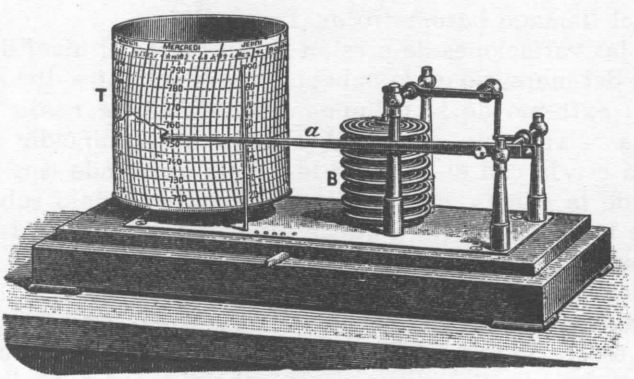


FIG. 13.4 Barómetro registrador.

cuyas paredes superior e inferior son muy delgadas. Se practica el vacío en su interior, donde lleva un muelle para evitar el aplastamiento. Al variar la presión exterior varía la deformación del muelle y estas variaciones se transmiten a una aguja indicadora. Se calibra por comparación con un barómetro de mercurio.

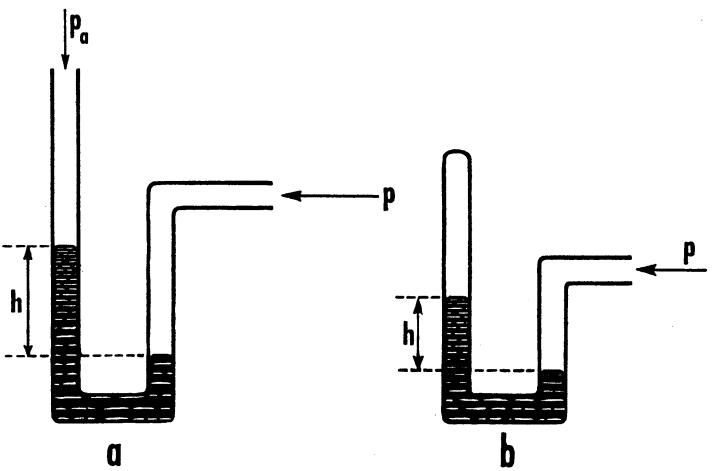


FIG.13.5 Manómetro *a*) de tubo abierto. *b*) de tubo cerrado.

Otros instrumentos destinados a medir presiones son los *manómetros*. El más sencillo es el de tubo en U abierto (fig. 13.5 *a*). Un extremo está en comunicación con el recinto cuya presión quiere medirse y el otro está abierto a la atmósfera. En el interior hay mercurio. El desnivel entre las dos ramas mide la diferencia de presión entre el recinto y la atmósfera. A esta diferencia de presiones se le llama a veces *presión manométrica*. Según la ecuación 13.11,

$$p - p_a = \rho\, g\, h$$

Otro tipo de manómetro tiene un extremo cerrado. Para medir presiones bajas se practica el vacío en dicho extremo y de esta manera el desnivel del mercurio nos permite calcular la presión a medir (fig. 13.5 *b*). Para medir presiones más elevadas puede llenarse de aire la parte cerrada del tubo. De esta manera, al aumentar la presión y ascender el mercurio por dicha rama, el aire se comprime y se opone al ascenso a causa de su aumento de presión. La presión medida será la suma de la presión del aire en la rama cerrada más $\rho\, g\, h$. Por lo general, están calibrados y se lee directamente la presión.

Los *manómetros metálicos* constan de un tubo de acero de paredes muy delgadas, sección elíptica y arrollado circularmente. Un extremo está abierto y se pone en comunicación con el recinto que contiene el gas cuya presión queremos medir. El otro extremo está cerrado y conectado a un vástago articulado que transmite los movimientos del

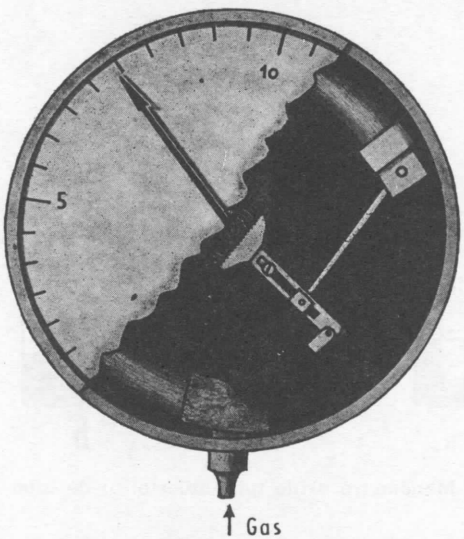


FIG. 13.6 Sección parcial de un manómetro metálico.

tubo a un índice. Al aplicar una presión a la parte abierta del tubo, actúa en el interior de él tendiendo a reducir su curvatura y este movimiento, transmitido al índice, nos indica la presión. Debe calibrarse previamente para que la lectura de la presión sea directa.

13.5 Unidades de presión. De la propia definición de presión resulta inmediato que sus unidades de medida serán el cociente entre la unidad de fuerza y la unidad de superficie. Así, la unidad SI de presión es el *pascal* (Pa), que es la presión que sobre una superficie de 1 m^2 ejercería una fuerza de 1 N. La unidad cgs de presión lleva el nombre de *baria* y es igual a la presión que sobre 1 cm^2 ejerce una fuerza de 1 dyna. Veamos la equivalencia entre las dos unidades definidas:

$$1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 10^5\,\frac{\text{dynas}}{\text{N}} \times 10^{-4}\,\frac{\text{m}^2}{\text{cm}^2} = 10 \text{ barias}$$

Como la baria es una unidad pequeña para ciertas aplicaciones (por ejemplo, en Meteorología), se toma a veces como unidad el *bar*, que es igual a un millón de barias, y el milibar (mbar), equivalente a mil barias.

En el § 13.4 hemos definido la *atmósfera* como la presión que ejerce en su base una columna de mercurio de 76,00 cm de altura, considerando el mercurio a 0°C a efectos de su densidad y en un lugar en que la intensidad del campo gravitatorio terrestre sea la normal, es decir, 9,806 N/kg. Esta unidad sugiere medir la presión en centímetros de mercurio o en milímetros de mercurio, que serán respectivamente 1/76 y 1/760 de atmósfera. La presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura recibe el nombre de *tor*. Como la densidad del mercurio a 0°C es de 13 590 kg/m^3, la ecuación 13.11 nos permite hallar la equivalencia

$$1 \text{ tor} = 13\,590 \times 9{,}806 \times 10^{-3} = 133{,}3 \text{ Pa}$$

También se emplea a veces la llamada *atmósfera técnica*, que es la presión que ejerce una fuerza de 1 kp aplicada a 1 cm^2.

13.6. Principio de Pascal. Consideremos un líquido en equilibrio y sean P_1 y P_2 dos puntos del líquido en los cuales la presión tome los valores p_1 y p_2, respectivamente. La diferencia entre estas dos presiones es siempre $\rho g h$ (ec. 13.11) y si aumentamos la presión en un punto, deberá aumentar la presión en el otro en igual cuantía, pues la diferencia debe mantenerse constante. Así pues, podemos enunciar el principio de Pascal diciendo: *las presiones en el interior de un líquido se transmiten por igual a todos sus puntos.*

Si se tratara de un gas, podríamos despreciar ρ y entonces la ecuación 13.10 nos diría que la presión ha de ser la misma en todos sus puntos y el principio de Pascal resulta inmediato.

El principio de Pascal halla su aplicación más interesante en la *prensa hidráulica*, dispositivo que consta de un tubo de diámetro pequeño comunicado con otro de diámetro grande, conteniendo un líquido. En el cilindro estrecho va un émbolo accionado por una palanca (fig. 13.7); el cilindro mayor lleva también un émbolo y sobre él se coloca lo que queramos prensar. Al aplicar al émbolo menor una fuerza $F = p S$, en el mayor aparecerá una presión igual a p que se traducirá en una fuerza $F' = p S'$, donde S y S' son las secciones de los dos cilindros. Dividiendo las dos fuerzas resulta

$$\frac{F}{F'} = \frac{S}{S'}$$

Es decir, las fuerzas son proporcionales a las superficies de los émbolos. Si los diámetros guardan la razón 1/10, las superficies guardarán la razón 1/100, y aplicando una fuerza al émbolo pequeño se obtendrá en el ancho una fuerza cien veces mayor.

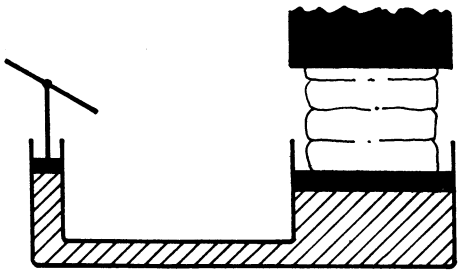


FIG. 13.7 Prensa hidráulica.

13.7 Ley de Boyle-Mariotte. Si tenemos una masa de gas encerrada en un cuerpo de bomba ocupando un volumen V_1 a una presión p_1 (fig. 13.8 *a*) y hacemos bajar el émbolo lentamente para que no varíe la temperatura hasta ocupar un volumen V_2, observaremos que la presión p_2 que alcanza es tal que

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \tag{13.12}$$

es decir: *cuando se comprime o dilata un gas manteniendo constante su temperatura, el próducto de la presión por el volumen se mantiene constante.*

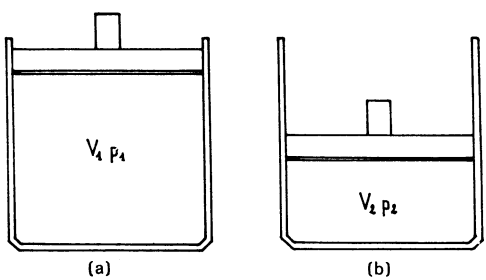


FIG. 13.8 Ley de Boyle-Mariotte.

Esta ley fue enunciada primeramente por el físico irlandés ROBERT BOYLE (1627-1691) y poco después, independientemente, por el francés EDMOND MARIOTTE (1620-1684). La ley fue el resultado de medidas ex-

perimentales realizadas con gases que se hallaban en condiciones muy alejadas de las de licuación. Cuando un gas se halla en condiciones de temperatura y presión próximas a las que originarían su condensación, su comportamiento dista mucho de cumplir con la ley de Boyle-Mariotte. No obstante, ésta resulta de gran utilidad para amplios dominios de presiones y temperaturas.

Aplicación: Determinar la densidad de un gas a cierta presión p conocida su densidad a la presión p_0 (se supone que no varía la temperatura).

Llamando m a la masa de gas, d_0 y V_0 su densidad y el volumen que ocupa a la presión p_0, y d y V su densidad y volumen a la presión p, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{m}{V} \\ d_0 &= \frac{m}{V_0} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{d_0} = \frac{V_0}{V}$$

y como $p\,V = p_0\,V_0$,

$$\frac{d}{d_0} = \frac{p}{p_0}$$

de donde puede despejarse d.

13.8 Principio de Arquímedes. Consideremos un fluido, o un sistema de fluidos, en equilibrio. Consideremos una porción del sistema limitada por una superficie cerrada S y sea V el volumen de dicha porción (fig. 13.9). Para que esté en equilibrio, será necesario que las

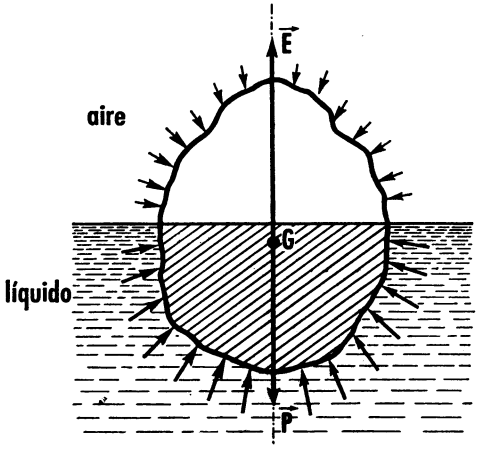


FIG. 13.9 Principio de Arquímedes.

fuerzas que sobre S ejerce la presión se equilibren con el peso del fluido, o fluidos, que hay en el interior de S. Es decir, la resultante de las fuerzas de presión debe ser una fuerza opuesta al peso y por tanto deberá estar soportada por la vertical que pase por el cdm del sistema de fluidos interior a S. A este cdm se le llama *centro de empuje*.

Ahora bien, si sustituimos el sistema de fluidos limitado por S por un sólido de igual forma y tamaño, ya hemos dicho varias veces (§§ 13.2 y 13.3) que la distribución de presiones no se alterará y el cuerpo, por estar sometido a las mismas fuerzas de presión que el sistema antes considerado, estará sometido a una fuerza vertical y hacia arriba de igual módulo que el peso de los fluidos desalojados. A esta fuerza se le da el nombre de *empuje* y es la que da el nombre al centro de empuje antes definido. Por tanto, podemos enunciar el principio de Arquímedes diciendo: *Todo cuerpo sumergido en un sistema de fluidos experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso de los fluidos desalojados.*

En el caso de la figura 13.9 podemos despreciar el empuje del aire frente al del líquido. Puede entonces simplificarse el enunciado diciendo: Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un líquido experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido desalojado.

Si un sólido homogéneo está sumergido totalmente en el líquido, para que esté en equilibrio deberán ser iguales los pesos del sólido y del líquido desalojado. El peso del sólido es

$$P = \rho_S V g$$

y el del líquido, que es igual al empuje, es

$$E = \rho_L V g$$

donde ρ_S es la densidad del sólido y ρ_L la del líquido. La igualdad $P = E$ exige, pues,

$$\rho_S = \rho_L$$

Si la densidad del sólido fuese mayor que la del líquido, el sólido cae al fondo. Si fuera más denso el líquido que el sólido, éste ascenderá y puede quedar en equilibrio quedando parcialmente sumergido. En este caso, el volumen de líquido desalojado será menor que el del sólido, de manera que se iguale el peso de este volumen menor de líquido con el peso del cuerpo.

Los aerostatos ascienden a causa del empuje, pues el gas que los

llena es menos denso que el aire. Si el peso de todo el aparato es $m\,g$, el volumen V, la densidad del gas ρ y la del aire ρ_a, la fuerza ascensional F es igual al empuje menos el peso total del aerostato:

$$\left.\begin{aligned} E &= \rho_a V g \\ P &= m g + \rho V g \end{aligned}\right\} \quad F = E - P = \rho_a V g - \rho V g - m g = [(\rho_a - \rho) V - m]g$$

Aplicaciones: Podemos aplicar el principio de Arquímedes a la medida de volúmenes y de densidades. Para medir el volumen de un cuerpo podemos emplear la llamada *balanza hidrostática*, que es una balanza en la cual los platillos están a niveles diferentes. Del más alto se cuelga el cuerpo mediante un hilo muy fino. Se equilibra la balanza y luego se introduce el cuerpo en agua destilada. El empuje de ésta nos desequilibra la balanza, y para volver a equilibrarla deberemos añadir pesas. Sea m la masa de éstas. Como su peso equilibra el empuje y éste es $E = V \rho_a g$, donde V es el volumen del cuerpo y ρ_a la densidad del agua a la temperatura del experimento, tendremos

$$m g = V \rho_a g \qquad \text{de donde} \qquad V = \frac{m}{\rho_a}$$

y ya tenemos el volumen buscado.

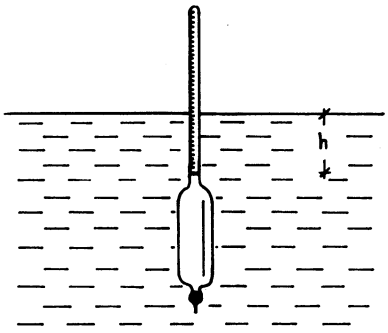


FIG. 13.10 Densímetro.

Para determinar densidades de líquidos podemos emplear la misma balanza con un flotador que, al sumergirlo en el líquido, la desequilibra. Volvemos a equilibrar y el peso añadido será igual al empuje, luego

$$m g = V \rho g \qquad \text{o sea} \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

el volumen V del flotador suele ser conocido y si no lo fuera se determinaría de la manera descrita anteriormente.

Otra aplicación la tenemos en el *densímetro* o *areómetro* (fig. 13.10) para medir densidades de líquidos. Consiste en una ampolla de vidrio terminada en un extremo por un pequeño depósito que contiene mercurio o perdigones y que hace que el instrumento se mantenga vertical al introducirlo en un

líquido. En el otro extremo tiene un tubo cilíndrico. Éste se hunde hasta una profundidad h_0 en un líquido de densidad conocida ρ_0. En otro líquido de densidad ρ_1 la profundidad sería h_1, etc. Así puede grabarse una escala en el tubo, que nos permita leer directamente la densidad del líquido en estudio.

También se aplica el principio de Arquímedes en la *corrección de las pesadas al vacío*, es decir, para determinar la masa de un cuerpo corrigiendo el empuje que sufre él y las pesas por el hecho de estar sumergidos en el aire.

Así, si pesamos un cuerpo de masa m y densidad d, siendo m' y d' la masa y densidad de las pesas, respectivamente, cuando la balanza esté equilibrada deberá ocurrir que

$$P - E = P' - E'$$

y como $V = m/d$ y $V' = m'/d'$, esta ecuación puede escribirse así:

$$m\,g - \frac{m}{d}\,d_a\,g = m'\,g - \frac{m'}{d'}\,d_a\,g$$

siendo d_a la densidad del aire en las condiciones en que se verifica la pesada. Simplificando:

$$m\left(1 - \frac{d_a}{d}\right) = m'\left(1 - \frac{d_a}{d'}\right)$$

de donde

$$m = m'\,\frac{1 - \dfrac{d_a}{d'}}{1 - \dfrac{d_a}{d}} \simeq m'\left(1 - \frac{d_a}{d'} + \frac{d_a}{d}\right)$$

Como se ve, cuanto menos diferentes sean las densidades del cuerpo y de las pesas, tanto menor será esta corrección.

13.9 Compresibilidad de los gases. Consideremos un gas encerrado en un cuerpo de bomba y que ocupe un volumen V estando a una presión p. Un ligero desplazamiento del émbolo reducirá el volumen a $V - \Delta V$ aumentando la presión a $p + \Delta p$. Este Δp puede considerarse como el esfuerzo aplicado al gas que le ha originado una deformación $-\Delta V/V$ (cfr. ec. 11.5). Luego el módulo de compresibilidad χ vendrá dado por

$$\chi = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -V\,\frac{\Delta p}{\Delta V}$$

y si hacemos tender a cero ΔV, tendremos

$$\chi = -V\,\frac{dp}{dV} \qquad (13.13)$$

Si se realiza la compresión de manera que no varíe la temperatura del gas, deberá cumplirse la ley de Boyle-Mariotte, es decir,

$$p\,V = \text{const.}$$

de donde, diferenciando,

$$p\,dV + V\,dp = 0 \qquad \text{o sea} \qquad -\frac{dp}{dV} = \frac{p}{V}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación 13.13 tenemos

$$\chi = p$$

es decir, que *el módulo de compresibilidad isotérmica de un gas es igual a su presión.*

13.10 Fuerzas intermoleculares; cohesión. Al principio de este capítulo hemos indicado que entre las moléculas de un líquido se ejercen unas fuerzas atractivas, llamadas de *cohesión,* que son las que hacen que el líquido tenga un volumen propio. Veamos brevemente cómo puede interpretarse la existencia de estas fuerzas: Las cargas eléctricas existentes en una molécula, compensan entre sí sus efectos, pero al tener una molécula en presencia de otra, las distribuciones de cargas pueden alterarse y dar origen a atracción (o repulsión) de las moléculas. Que estas fuerzas son de origen eléctrico parece deducirse del hecho de ser enormemente mayores que las fuerzas de atracción gravitatoria que nos daría la ecuación 7.22.

Si representamos gráficamente la energía potencial U de una molécula en presencia de otra situada a una distancia x de ella, obtendremos una gráfica como la representada en la figura 13.11. En ella la energía potencial se considera nula cuando las moléculas están infinitamente alejadas una de otra.

Si consideramos x como la separación entre los centros de las dos moléculas, cuando $x > d$ la energía potencial es mayor que la mínima posible y, como todos los sistemas evolucionan tendiendo a tener la menor energía potencial, las moléculas tenderán a acercarse, es decir, estarán sometidas a fuerzas atractivas *(cohesión).* En cambio, si por cualquier causa se llevaran sus centros a una distancia $x < d$, la tendencia a hacer mínima la energía potencial las separaría, es decir, se ejercerían una fuerza repulsiva. Esta fuerza es la que impide que una molécula atraviese a la otra, o sea es la responsable de la impenetrabilidad de la materia.

La distancia d puede considerarse como el diámetro molecular,

ya que es la mínima distancia a que pueden encontrarse los centros de dos moléculas. A distancias del orden de x_1 y x_2 (fig. 13.11), la energía potencial toma valores casi iguales. Ello significa que para llevar una molécula desde una distancia x_1 al centro de la otra hasta una distancia x_2 habrá que realizar un trabajo muy pequeño (diferencia entre las energías potenciales), lo cual entraña que la fuerza de atracción sea muy pequeña. Despreciando, pues, las fuerzas de

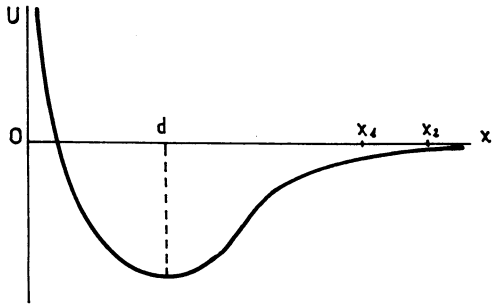


FIG. 13.11 Diagrama de la energía potencial de una molécula en presencia de otra, en función de su separación.

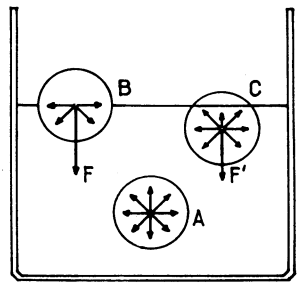


FIG. 13.12 Cohesión.

atracción correspondientes a separaciones superiores a x_1, podremos considerar que sobre una molécula se harán sensibles las fuerzas atractivas que le ejercen las moléculas cuyos centros se hallen en el interior de una esfera de radio x_1 y centro el de la molécula. A esta esfera se le llama *esfera de acción* de la molécula, pues también serán sensibles (principio de la acción y la reacción) las fuerzas que ella ejerza sobre las moléculas interiores a dicha esfera.

Las moléculas de los gases suelen presentar separaciones entre ellas que, por término medio, son mucho mayores que el radio de su esfera de acción. Por eso puede considerarse que no se ejercen fuerzas entre ellas más que en el instante del choque. En los gases perfectos no se aprecian fuerzas de cohesión. En los líquidos, por el contrario, las separaciones entre moléculas son menores y en la esfera de acción de una molécula puede haber un gran número de ellas. Así, por ejemplo, en A (fig. 13.12) tenemos una molécula sometida a la atracción de todas las moléculas existentes en su esfera de acción. Éstas son tan numerosas que, por término medio, habrá tantas en una dirección como en otra y la resultante de todas las fuerzas de atracción será nula. En cambio, las esferas de acción B y C de las moléculas próximas a la superficie no contienen moléculas atractivas en su parte

más elevada, por lo que la resultante de las fuerzas de cohesión no será nula, sino vertical y hacia abajo.

De lo anterior se deduce que para llevar una molécula del interior a la superficie será necesario realizar un trabajo contra las fuerzas mencionadas y ello significa que las moléculas de la superficie deben tener una energía llamada *energía superficial* por razón de su posición, es decir, se trata de una energía potencial. Las fuerzas verticales y hacia abajo que se ejercen sobre ellas impiden que las moléculas escapen del líquido, y como la energía potencial tiende a ser mínima en todos los sistemas, la superficie libre del líquido deberá ser plana, ya que entre todas las superficies que tengan un mismo contorno, la plana es la de menor área.

13.11 Tensión superficial. La tendencia a ser mínima la superficie libre del líquido da origen a fuerzas tangentes a la superficie y que se ponen de manifiesto en gran número de ejemplos. Insectos como el zapatero o tejedor se mantienen sobre sus patas sobre la superficie del agua y un alfiler engrasado depositado horizontalmente también, a pesar de ser más denso que el agua. Ello se debe a que el peso del cuerpo tiende a hundirlo en el agua, pero al deformar la superficie, las fuerzas superficiales tangentes a la superficie libre (fig. 13.13) equilibran el peso del cuerpo.

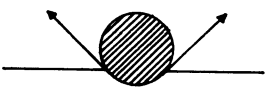


FIG. 13.13 Peso equilibrado por las fuerzas de tensión superficial.

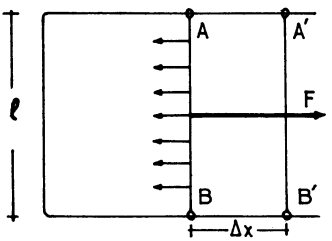


FIG. 13.14 La tensión superficial mide el trabajo que hay que efectuar para aumentar la superficie libre del líquido en una unidad.

Si intentamos cortar la superficie libre de un líquido vemos que, inmediatamente después de pasar la cuchilla, se cierra el corte porque unas fuerzas superficiales llevan un labio del corte sobre el otro, reduciendo así la superficie libre. La fuerza que se ejerce por unidad de longitud la representaremos por σ y se le da el nombre de *tensión superficial* del líquido. En el SI se mide en N/m.

Imaginemos el siguiente experimento: formemos una película líquida en un cuadro constituido por un bastidor en U de alambre y una corredera AB (fig. 13.14). Para mantener ésta en equilibrio será necesario mantenerle aplicada una fuerza **F** que equilibre a las fuerzas de tensión superficial. Hasta aquí, la película líquida se comporta de manera análoga a una membrana elástica, pero si incrementando infinitamente poco **F** desplazamos la corredera una distancia Δx, dejándola en $A'B'$, a la nueva posición de equilibrio corresponde la misma fuerza **F** que antes, cosa que no ocurriría con una membrana elástica a la cual a mayor extensión correspondería mayor fuerza. Como la corredera tiene una longitud l y la película tiene dos caras. a cada una de ellas corresponde una fuerza σl y por tanto

$$F = 2\sigma l \qquad \text{o sea} \qquad \sigma = \frac{F}{2l} \tag{13.14}$$

donde σ es la tensión superficial del líquido para la temperatura a que se realiza el experimento.

Ahora bien, al pasar de la posición AB a la $A'B'$, la fuerza **F** ha realizado un trabajo $F\,\Delta x$ y tenemos, en virtud de la ecuación 13.14,

$$\Delta W = F\,\Delta x = \sigma\, 2\, l\, \Delta x$$

pero $l\,\Delta x$ es lo que ha aumentado la superficie de una cara de la película, por lo que el incremento ΔS de superficie será el doble, y por lo tanto,

$$\Delta W = \sigma\,\Delta S$$

de donde

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \tag{13.15}$$

que nos indica que *la tensión superficial de un líquido es igual al trabajo que hay que entregarle para aumentar en una unidad su superficie libre.* Por tanto, también podrá expresarse la tensión superficial en erg/cm^2 y en el SI en J/m^2.

Así, si echamos agua en un vaso desde una altura de 10 cm, no se forma espuma, y sí se forma si en vez de agua echamos cerveza. Ello significa que el trabajo entregado al líquido subyacente (*mgh*) es capaz de aumentar mucho la superficie libre de la cerveza y no la del agua, porque ésta tiene una tensión superficial mucho mayor. Para que el agua forme espuma, la altura de caída h ha de ser mucho mayor, como ocurre en las cataratas. La disolución de un detergente en agua reduce mucho la tensión superficial de la disolución y por eso

se forma tanta espuma en las lavadoras a causa del trabajo realizado por la hélice, espuma que no se formaría si sólo hubiera agua pura.

13.12 Presión debida a la curvatura de la superficie libre. Vamos a considerar una esfera líquida y representemos por p el exceso de presión que en su interior existe respecto a la región exterior. Considerando un plano diametral, este exceso de presión multiplicado por el área πr^2 de dicha sección diametral nos mide la fuerza que uno de los hemisferios ejerce sobre el otro tendiendo a separarlo. El que la gota no «se parta» en dos se debe a que esta fuerza está equilibrada por las fuerzas de tensión superficial a lo largo del círculo máximo que delimita los dos hemisferios. Esta fuerza sería $\sigma\, 2\pi r$ y, en consecuencia, tendremos

$$p\pi r^2 = \sigma\, 2\pi r$$

de donde

$$p = \frac{2\sigma}{r} \tag{13.16}$$

Como vemos, esta presión sólo se anularía si $r = \infty$, es decir, si la superficie libre fuera plana. En realidad, la ecuación 13.16 es un caso particular de uno más general que no vamos a demostrar. En todo punto de una superficie podemos encontrar dos curvaturas de radios principales r_1 y r_2. Pues bien: estas curvaturas hacen que en el interior del líquido, cuya superficie libre sea la mencionada, exista un exceso de presión sobre la exterior

$$p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Como en el caso de la superficie esférica $r_1 = r_2$, esta expresión nos da la ecuación 13.16.

13.13 Contacto entre dos líquidos. Un experimento que se cita frecuentemente al tratar la tensión superficial es el del lacito de hilo depositado sobre una película líquida (por ejemplo, solución detergente, fig. 13.15) y que al pinchar en su interior adopta la forma circular (fig. 13.15 *b*), que es la que permite que la película líquida tenga mínima superficie. Pues bien, por la misma razón, una gota de aceite que depositáramos sobre el agua adopta un contorno circular. No obstante, en este caso observamos que entre el aceite y el agua existe una superficie de separación y ello afectará, por una parte, al hecho de que la esfera de acción de la molécula B (fig. 13.12) tendría en su

parte superior aceite (si *B* estuviera en el agua), por lo que podríamos hablar de una tensión superficial en la superficie de separación agua-aceite, que no tiene por qué ser igual a la existente en la superficie

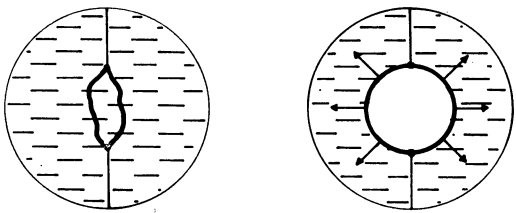


FIG. 13.15 Lacito de hilo depositado sobre una película *a*) antes de pinchar ésta. *b*) Tras haberla pinchado dentro del lacito.

agua-aire. En efecto, la primera resulta ser del orden de 20 dyna/cm, mientras que la correspondiente a la superficie de separación agua-aire es de 72,8 dyna/cm a 20°C.

Así pues, si sobre un líquido dejamos caer una gota de otro (fig. 13.16), un elemento dl del contorno de ésta se hallará sometido a tres fuerzas **T**, **T′** y **T″** debidas a las tensiones superficiales que intervienen (en la fig. 13.16, agua-aire, aceite-aire y agua-aceite) y que deben equilibrarse. Ello hace que T deba ser menor que $T' + T''$, pues debe ser igual a la longitud de la diagonal del paralelogramo

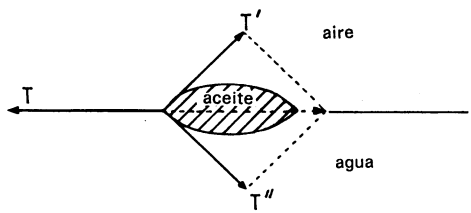


FIG. 13.16 Gota de aceite flotando en el agua.

definido por **T′** y **T″** como lados. Esto hace que la grasa fundida sobre agua *caliente* forme los ojos que vemos en el caldo. En cambio, como el aceite a 20°C en presencia de aire tiene una tensión superficial de sólo 32 dyna/cm y entre agua y aire es de 72,8 dyna/cm, siempre será $72{,}8 > 32 + 20$ (pues es 20 dyna/cm la tensión superficial entre agua y aceite) y no podrán formarse *ojos* de aceite, sino que éste se extenderá sobre la superficie del agua formando una capa muy delgada. No permite la presencia del aire junto con él y el agua.

13.14 Contacto entre sólido y líquido. También en el contacto entre un fluido y un sólido existen fuerzas de tensión superficial y ello se pone de manifiesto en la formación de *meniscos* (fig. 13.17).

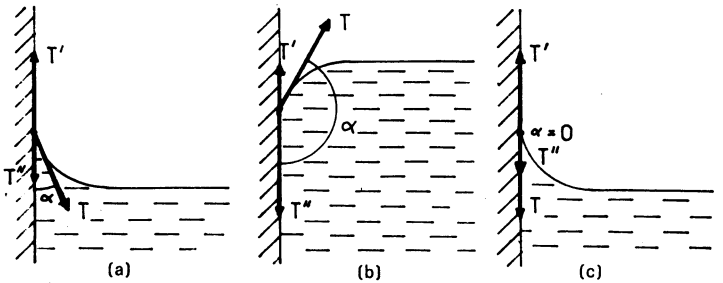


FIG. 13.17 Meniscos. En (*a*) y (c) el líquido moja a la pared y en (b) no la moja.

Para interpretarla podemos atribuir tensión superficial a las parejas de superficies entre los fluidos y el sólido, además de a la pareja de fluidos. En la figura 13.17 se han representado las fuerzas que se ejercen sobre un elemento en contacto con el sólido, el líquido y el aire y siempre la resultante de dichas fuerzas ha de ser normal a la pared. Al ángulo α se le da el nombre de *ángulo de contacto* y siempre se cumple que $T' = T\cos\alpha + T''$, pues la componente tangente a la pared de la resultante ha de ser nula. Si $\alpha < 90°$, $T' > T''$; pues $T' - T''$ ha de ser menor que T (igual a T si $\alpha = 0$) y se dice que el líquido *moja* al sólido. En cambio, si α es obtuso, $\cos\alpha < 0$ y $T' < T''$. Se dice entonces que el líquido *no moja* al sólido.

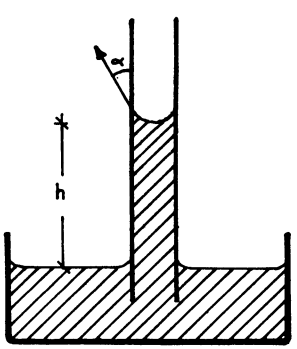


FIG. 13.18 Ascenso capilar.

13.15 Capilaridad; ley de Jurin. Cuando se introduce en un líquido un tubo estrecho (capilar), podemos observar que por su interior asciende el líquido hasta alcanzar una altura h (fig. 13.18). Un elemento líquido en contacto con el tubo se hallará sometido a una fuerza tangencial $-\mathbf{T}$ y ejercerá por reacción una fuerza $\mathbf{T}$ sobre la superficie del menisco. La resultante de estas fuerzas $\mathbf{T}$ estará dirigida según el eje del tubo y su módulo lo obtendremos sumando las componentes verticales T cos α correspondientes a todos los elementos del contacto líquido-tubo. Dicha suma será $2\pi r\sigma \cos \alpha$, siendo r el radio del tubo y deberá ser igual al peso de la columna líquida que queda en equilibrio, es decir,

$$2\pi r\sigma \cos \alpha = \pi r^2 h\rho g$$

de donde tenemos

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r\rho g}$$

que expresa la *ley de Jurin* que nos dice que la altura a que asciende por capilaridad un líquido en un tubo es proporcional a la tensión superficial del líquido e inversamente proporcional a su densidad y al radio del tubo.

Los fenómenos de capilaridad pueden observarse en los papeles secantes y en los terrones de azúcar colocados sobre una delgada capa de café, observándose cómo asciende el líquido por los canalillos capilares que existen en unos y otros.

14

Dinámica de fluidos

La Dinámica de fluidos, llamada a veces Hidrodinámica, estudia la relación existente entre el movimiento de los fluidos y las fuerzas que lo originan. Muchos son los movimientos de fluidos cuyo estudio dinámico resulta muy complicado y que requieren conocimientos de matemáticas que, por lo general, no poseen los alumnos que estudien en este libro. El carácter, forzosamente elemental, que hemos de darle nos obliga a limitar nuestra atención al caso de los movimientos estacionarios, el cual puede tratarse sin dificultades excesivas. No se crea que sólo lo tratamos a causa de su simplicidad y que su estudio sea de poca utilidad. Por el contrario, en la Naturaleza encontramos muchísimos movimientos de fluidos que son estacionarios o que pueden considerarse como tales.

14.1 Movimiento estacionario de un fluido. Sea un fluido en movimiento en una región del espacio. Si a cada punto de ésta le podemos hacer corresponder un vector velocidad independiente del tiempo, es decir, que las partículas del fluido pasen por cada punto con una velocidad característica de éste, diremos que el fluido se halla en *movimiento estacionario,* o que se mueve en *régimen permanente.*

Así pues, en la región considerada tendremos establecido un *campo de velocidades.* Las líneas de fuerza (cfr. § 3.1) de este campo reciben el nombre de *líneas de corriente.* También serán independientes del tiempo, es decir, estarán fijas en el espacio y del hecho de ser tangentes en cada punto a la velocidad se desprende que coinciden con las trayectorias seguidas por las partículas del fluido. Si el movimiento no fuera estacionario, las líneas de corriente no estarían fijas y no coincidirían con las trayectorias.

Por cada punto del campo de velocidades, es decir, de la región del espacio ocupada por el fluido en movimiento estacionario, pasará una

línea de corriente y sólo una. Imaginemos una curva cerrada cualquiera y por cada uno de sus puntos pasará una línea de corriente. El conjunto de todas estas líneas de corriente determinará una superficie a la que llamaremos *tubo de corriente*. En la figura 14.1 se ha representado un tubo de corriente. Una partícula que se halle en su interior en un momento dado seguirá moviéndose por él, pues la trayectoria es una línea de corriente y no podrá atravesar las paredes del tubo porque en el lugar donde lo hiciere habría dos líneas de corriente (la que forma parte de la pared y la trayectoria), lo cual es absurdo. Por tanto, a pesar de que el tubo de corriente no tiene unas paredes materiales, conduce el fluido por su interior como si las tu-

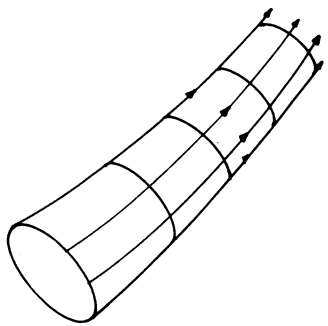


FIG. 14.1 Tubo de corriente.

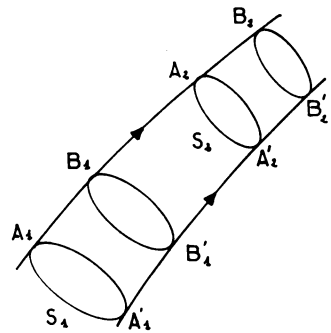


FIG. 14.2 Deducción de la ecuación de continuidad.

viera. Piénsese que dentro del tubo podríamos imaginar otros tubos y que todos ellos poseen las mismas propiedades. Si la curva cerrada que permite determinar el tubo fuera muy pequeña, o sea si el tubo fuera muy estrecho, se da a éste el nombre de *filete*.

14.2 Ecuación de continuidad. Consideremos una masa de *fluido* $A_1A_1'A_2A_2'$ (fig. 14.2) en un tubo de corriente. Al cabo de un tiempo dt ocupará la posición $B_1B_1'B_2B_2'$. Si es v_1 la celeridad de la sección A_1A_1' de área S_1 y es v_2 la de A_2A_2' de área S_2, tendremos

$$\overline{A_1B_1} = v_1\,dt \qquad \overline{A_2B_2} = v_2\,dt \tag{14.1}$$

La masa $A_1A_1'A_2A_2'$ la podemos considerar compuesta de las masas $A_1A_1'B_1B_1'$ y $B_1B_1'A_2A'_2$, lo que simbolizaremos de la manera

$$(A_1A_1'A_2A_2') = (A_1A_1'B_1B_1') + (B_1B_1'A_2A_2') \tag{14.2}$$

y análogamente,

$$(B_1B_1'B_2B_2') = (B_1B_1'A_2A_2') + (A_2A_2'B_2B_2') \tag{14.3}$$

pero los primeros miembros de las ecuaciones 14.2 y 14.3 son iguales, pues se trata de la misma masa de fluido en dos posiciones diferentes, luego habrá que igualar también los segundos miembros de las ecuaciones 14.2 y 14.3, de donde resulta

$$(A_1A_1'B_1B_1') = (A_2A_2'B_2B_2')$$

Esta igualdad entre masas puede escribirse en la forma

$$\rho_1 S_1 \cdot \overline{A_1B_1} = \rho_2 S_2 \cdot \overline{A_2B_2}$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las densidades del fluido en A_1 y A_2, respectivamente. Sustituyendo en esta ecuación las ecuaciones 14.1 y simplificando, queda

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \tag{14.4}$$

que es la *ecuación de continuidad* para un fluido cualquiera en movimiento estacionario.

Esta ecuación admite una simplificación en el caso de que el fluido sea incompresible, pues entonces $\rho_1 = \rho_2$ y simplificando la ecuación 14.4 nos da

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{14.5}$$

o sea que en un tubo de corriente la velocidad es inversamente proporcional a la sección. Esto nos permite predecir, al contemplar un mapa de líneas de corriente, en qué puntos hay mayor velocidad. Evidentemente, en las regiones donde las líneas de corriente estén más apretadas, los tubos tendrán menor sección que en las regiones donde estén más separadas y una gran concentración de líneas de corriente indicará velocidad grande.

14.3 Teorema de Bernoulli. Consideremos la porción de fluido comprendida entre dos secciones muy próximas de un filete (fig. 14.3). Estableciendo un sistema de abscisas curvilíneas sobre el filete, al punto A correspondería una abscisa curvilínea l y al A' correspondería $l + dl$. La presión será también función de l y en la sección A valdrá p y en la A' valdrá $p + dp$. Estas secciones tienen áreas infinitesimales que difieren en infinitésimos de orden superior, dada su proximidad, por lo que podemos representar ambas áreas por dS y

las fuerzas que sobre ellas se ejercen a causa de la presión valdrán $p\,dS$ y $(p + dp)\,dS$ y tendrán la dirección del movimiento pero sentidos opuestos. Las fuerzas debidas a la presión sobre la superficie lateral del elemento considerado se comprende que darán una re-

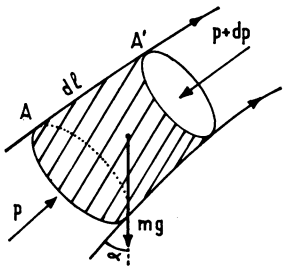


FIG. 14.3 Fuerzas que se ejercen sobre un elemento de volumen del fluido.

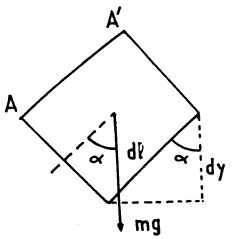


FIG. 14.4 El elemento de volumen y su peso mg.

sultante nula. Consideraremos que, *aparte de estas fuerzas debidas a la presión, sólo se ejerce sobre el elemento su propio peso* $\rho\,dS \cdot dl \cdot g$, que es una fuerza vertical.

El elemento podemos asimilarlo a un punto material, sometido a las fuerzas anteriores, el cual recorre una trayectoria asimilable a una línea de corriente. Busquemos la componente tangencial de la fuerza, componente que consideraremos positiva en el sentido del avance. Será:

$$p\,dS - (p + dp)\,dS - \rho\,dS\,dl\,g\cos\alpha \tag{14.6}$$

Pero en la figura 14.4 se ve que

$$\cos\alpha = \frac{dy}{dl} \tag{14.7}$$

donde dy es lo que aumenta el nivel del elemento al avanzar una distancia dl, luego sustituyendo la ecuación 14.7 en la 14.6 y simplificando, queda para la componente tangencial de la fuerza

$$-dp\,dS - \rho\,dS\,g\,dy$$

y según la segunda ley de Newton ha de ser igual al producto de la masa por la aceleración *tangencial* (cfr. ec. 4.14), luego

$$-dp\,dS - \rho\,dS\,g\,dy = \rho\,dS\,dl\frac{dv}{dt} \tag{14.8}$$

y como $v = dl/dt$, dividiendo la ecuación 14.8 por $\rho\, dS$ y trasponiendo términos queda

$$\frac{dp}{\rho} + g\, dy + v\, dv = 0$$

que integrada nos da

$$\int \frac{dp}{\rho} + g\, y + \frac{1}{2} v^2 = \text{const.} \qquad (14.9)$$

El segundo término de este trinomio mide la energía potencial gravitatoria de la unidad de masa (potencial gravitatorio), el tercero no es sino la energía cinética por unidad de masa y el primero podemos ver que tiene también las dimensiones de una energía por unidad de masa. Se trata de la energía potencial de la cual derivan las fuerzas de presión. La ecuación 14.9, pues, expresa la conservación de la energía. Para poder aplicarla, será necesario conocer la densidad en función de la presión, pues si no sería imposible calcular la integral del primer término.

Si el fluido fuera incompresible, la densidad sería constante, saldría fuera de la integral y multiplicando por ella los dos miembros de la ecuación 14.9 tendríamos

$$p + \rho\, g\, y + \tfrac{1}{2} \rho\, v^2 = \text{const.} \qquad (14.10)$$

que constituye la expresión del teorema de Bernoulli para fluidos incompresibles. Sus tres términos tienen las dimensiones de una presión.

14.4 Aplicaciones. Son muchísimos los dispositivos que basan su funcionamiento en las propiedades del movimiento estacionario de un fluido y que, por tanto, rige el teorema de Bernoulli. Citaremos unos cuantos ejemplos de utilización frecuente, los cuales nos ayudarán a fijar ideas.

El *pulverizador* (fig. 14.5), al desplazar el émbolo E, hace que por el orificio A salga aire a gran velocidad en virtud de la ecuación 14.5, lo que hace que la presión p_A en A baje mucho al tomar un valor considerable el tercer término de la ecuación 14.10. El segundo miembro de ésta es la presión atmosférica, que es la que se tenía antes de mover el émbolo, pues entonces $v = 0$ y podemos tomar el origen de la coordenada y en A. Así pues, al salir el aire por A, p_A será muy inferior a la presión atmosférica, que es la que se tiene en B. Las pequeñas dimensiones del pulverizador nos permiten considerar aproximadamente que

$$\rho\, g\, y_A = \rho\, g\, y_B \qquad (14.11)$$

y la ecuación 14.10 puede escribirse así:

$$p_A + \tfrac{1}{2} \rho\, v_A^2 = p_B$$

pues v_B es despreciable. La diferencia de presiones entre B y A se hace suficientemente grande para hacer ascender el líquido por el tubo vertical hasta A, donde es dispersado por la corriente de aire.

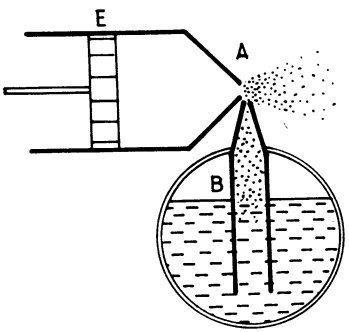


FIG. 14.5 Pulverizador.

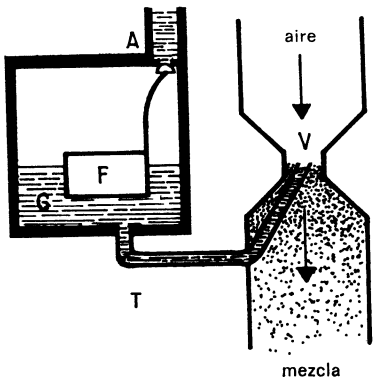


FIG. 14.6 Carburador.

En la figura 14.6 se ilustra el funcionamiento del *carburador* de un motor de explosión. Se han omitido en el dibujo el estrangulador y la válvula mariposa para no complicar la figura. Por A penetra la gasolina G y alcanza un nivel para el cual el flotador F obtura la entrada del líquido. Este nivel coincide con el del extremo del tubo T en el estrechamiento del *tubo de Venturi* V por el que pasa a gran velocidad el aire procedente del filtro de aire. Esta gran velocidad hace que la presión en dicho estrechamiento sea muy baja y por un efecto análogo al estudiado en el pulverizador extrae gasolina del tubo T, la cual, mezclada con el aire, pasa a los cilindros del motor.

Por último, mencionaremos el *tubo de Pitot* empleado en los aviones como velocímetro. En la figura 14.7 se ha esquematizado este dispositivo consistente en una forma aerodinámica en cuya superficie existe multitud de orificios A y en su vértice frontal B la entrada de un tubo que va a parar a un manómetro M cuyo otro extremo está conectado mediante un tubo al interior de la forma aerodinámica antes citada. Ésta se coloca en el borde de ataque del ala y los fenómenos que tendrán lugar serán los mismos que se tendrían si el avión estuviera en reposo y fuera el aire el que se moviera hacia atrás con celeridad igual a la que lleva el avión en realidad. Así pues, las líneas de corriente se separarían en B adaptándose a la superficie de la forma aerodinámica, quedando tangentes a ella. El punto B es un *punto de estancamiento* y en él el aire no tiene movimiento relativo, por lo que $v_B = 0$. En cambio, en los demás puntos de la superficie llevará una velocidad relativa de valor v_A que es el de la del avión respecto al aire. La ecuación 14.10 nos dará en este caso

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B$$

pues podemos considerar $\rho g y_A = \rho g y_B$ como antes, y despejando

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

y como $p_B - p_A$ es precisamente lo que señala el manómetro, pues en el interior de la forma la presión es la misma que en los orificios A, el conocimiento aproximado de la densidad ρ del aire a la altura de vuelo permitirá graduar directamente en km/h la escala del manómetro.

14.5 Teorema de Torricelli. La velocidad de salida de un líquido por un orificio de un depósito abierto a la atmósfera libre y siendo despreciable el área del orificio frente a la de la superficie libre del líquido, puede deducirse también aplicando el teorema de Bernoulli.

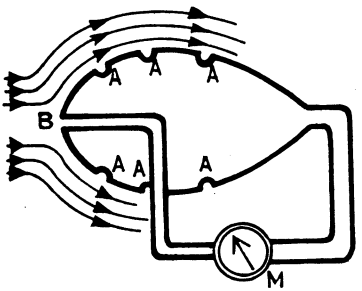


FIG. 14.7 Tubo de Pitot.

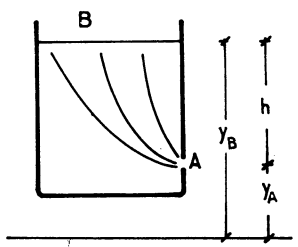


FIG. 14.8 Salida de un líquido por un orificio.

Si el área del orificio practicado en A (fig. 14.8) es despreciable frente a la de la superficie libre, las velocidades del líquido en el interior del depósito nunca son demasiado grandes y como el descenso del nivel es imperceptible, podremos considerar estacionario el movimiento.

Las líneas de corriente se apretarán en las proximidades de A y estarán muy separadas en las otras regiones, lo que indica que sólo hay velocidades apreciables cerca del orificio (cfr. final § 14.2).

Aplicando la ecuación 14.10 a los puntos A y B se tiene

$$p_A + \rho g y_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \rho g y_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 \qquad (14.12)$$

Pero ahora $p_A = p_B$ por ser la presión atmosférica; $v_B = 0$, pues es imperceptible el descenso del nivel de la superficie libre, y como $h = y_B - y_A$, la ecuación 14.12 queda en la forma

$$\tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g h \qquad \text{de donde} \qquad v_A = \sqrt{2 g h} \qquad (14.13)$$

este resultado fue enunciado por TORRICELLI diciendo que *la celeridad con que sale un líquido por un orificio de un depósito es la misma con que pasaría frente a dicho orificio un cuerpo pesado que cayera libremente si se abandonara al nivel de la superficie libre del líquido.*

Esto hace que la celeridad con que salga el agua por un orificio practicado en la base de una presa sea la misma que tendría en dicho lugar si cayera desde el nivel de la superficie libre en el embalse.

14.6 Viscosidad. Los movimientos de fluidos estudiados hasta ahora eran debidos solamente a fuerzas debidas a la presión y a la gravedad. En el § 13.1 dábamos una definición de fluido que lleva de manera inmediata a esto. No obstante, los fluidos no siempre pueden considerarse como perfectos y al moverse una porción de fluido respecto a otra le ejercen esfuerzos tangenciales que, en muchos casos, no pueden despreciarse. Se dice entonces que el líquido es viscoso y el fenómeno recibe el nombre de *viscosidad.*

Para iniciar su estudio, consideremos un fluido animado de un movimiento tal que podamos considerarlo descompuesto en capas caracterizadas cada una de ellas por una velocidad determinada. Diremos que el fluido se mueve en *régimen laminar.*

Así, por ejemplo, si consideramos en un río una zona alejada de las orillas y en la cual el lecho del río sea plano, la capa en íntimo contacto impregna el lecho y está en reposo. Sobre ella desliza otra capa, frenada por la anterior, que llevará una velocidad pequeña, sobre ella deslizará otra con velocidad algo mayor, etc., y la más rápida de todas las capas será la superior. La distribución de las velocidades será de la forma representada en la figura 14.9. Cada capa frena a la que tiene encima y ésta (principio de la acción y la reacción) le aplica una fuerza aceleradora, como ocurriría en una pila de cuartillas si aplicáramos a la superior una fuerza tangencial. Podemos considerar que en vez del lecho de un río es una pieza metálica y que la capa superior es otra, habiendo interpuesto aceite u otro fluido lubricante. Éste se movería de la manera indicada y ello nos puede ayudar a comprender cómo actúan los lubricantes.

El esfuerzo tangencial (fuerza por unidad de superficie) que se ejercen dos capas resulta ser proporcional a la diferencia entre sus velocidades e inversamente proporcional a su separación. Así pues, si dos capas separadas dy llevan una velocidad relativa dv, el esfuerzo tangencial será

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dy} \tag{14.14}$$

y el coeficiente de proporcionalidad η es característico del fluido, depende marcadamente de su temperatura y poco de su presión. Su unidad es el *poise* (Po), que sería el *coeficiente de viscosidad de un*

fluido tal que dos superficies paralelas de área 1 cm², separadas 1 cm y moviéndose con una velocidad relativa de 1 cm/s se ejercen una fuerza de 1 dyna.

La unidad de uso legal en España es el N·s/m², correspondiente al Sistema Internacional (S.I.) de Unidades de Medida.*

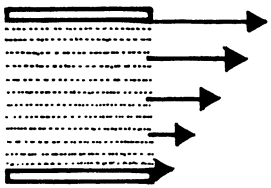


FIG. 14.9 Líquido moviéndose en régimen laminar.

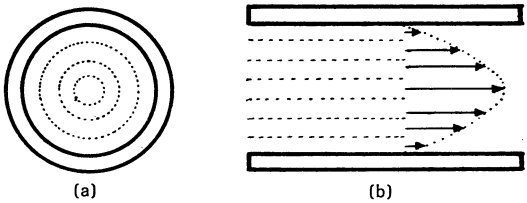


FIG. 14.10 Circulación laminar por un tubo. *a*) Sección transversal. *b*) Sección longitudinal; distribución de las velocidades.

14.7 Circulación laminar de un líquido viscoso por un tubo. En la deducción del teorema de Bernoulli no se tuvieron en cuenta las fuerzas de viscosidad, por lo que aquél no será aplicable cuando éstas jueguen un papel preponderante en el movimiento. Éste es el caso de la circulación de un líquido viscoso por un tubo capilar. En este caso, el líquido circula muy lentamente, el régimen es laminar y la capa en contacto con las paredes del tubo (fig. 14.10) tiene velocidad nula, mientras que el filete líquido que constituye el eje del tubo tendrá la máxima velocidad. La distribución de las velocidades entre las distintas capas será del tipo representado en la figura 14.10 *b*.

Para calcular el *gasto* (volumen de líquido que atraviesa una sección del tubo en unidad de tiempo) consideraremos el líquido des-

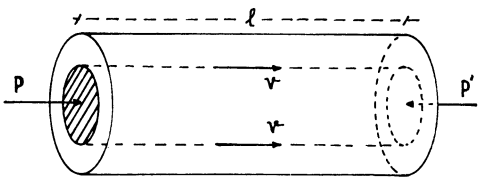


FIG. 14.11

compuesto en cilindros coaxiales con el tubo. Si consideramos constante el gasto, la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre uno cualquiera de dichos cilindros es nula, pero dichas fuerzas son: las

* Ley 88/1967 de 8 de noviembre de 1967.

de presión que se ejercen sobre las bases del cilindro (fig. 14.11) y que darán una resultante $\pi r^2 (p - p')$ en el sentido de avance y las de viscosidad que frenan el movimiento. Éstas se ejercen sobre la superficie lateral del cilindro cuya área es $2\pi r l$, y como la ecuación 14.14 nos da la fuerza de viscosidad por unidad de superficie, la fuerza total de freno será

$$\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$$

ya que el gradiente de velocidad hemos de tomarlo ahora a lo largo del radio. Esta fuerza de freno, con la aceleradora, ha de dar resultante nula, luego

$$\pi r^2 (p - p') + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l = 0$$

o sea

$$-2 l \eta \frac{dv}{dr} = (p - p') r$$

es decir,

$$-dv = \frac{p - p'}{2 l \eta} r \, dr$$

La fracción del segundo miembro podemos considerarla constante si el régimen es permanente, e integrando tenemos

$$-v = \frac{p - p'}{4 l \eta} r^2 + \text{const.} \qquad (14.15)$$

y como hemos dicho que la capa líquida en contacto con las paredes está en reposo, si llamamos a al radio del tubo, la ecuación 14.15 nos da

$$0 = \frac{p - p'}{4 l \eta} a^2 + \text{const.} \qquad (14.16)$$

Restando de la ecuación 14.16 la ecuación 14.15 tenemos

$$v = \frac{p - p'}{4 l \eta} (a^2 - r^2)$$

que nos da la ley de distribución de las velocidades entre las capas líquidas. Vemos que corresponde a una parábola como la representada en la figura 14.10 *b*.

Si ahora consideramos la capa cilíndrica de radios r y $r + dr$ en la figura 14.10 *a*, el volumen de líquido que transporta en unidad de tiempo a través de una sección será $v \cdot 2\pi r\, dr$ y sumando las contribuciones de todas las capas tendremos el gasto total

$$G = \int_0^a v \cdot 2\pi r\, dr = \frac{p - p'}{4 l \eta} \int_0^a (a^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{\pi (p - p')}{2 l \eta} \left[a^2 \int_0^a r\, dr - \int_0^a r^3\, dr \right]$$

que nos da

$$G = \frac{\pi a^4}{8 l \eta} (p - p') \tag{14.17}$$

que es la *ley de Poiseuille* que nos relaciona el gasto con el radio del tubo, el coeficiente de viscosidad del líquido y la pérdida de carga

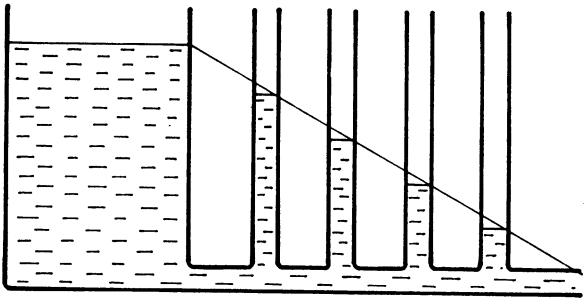


FIG. 14.12 Pérdida de carga en un tubo.

por unidad de longitud $(p - p')/l$. Así, si tuviéramos un tubo horizontal de pequeño diámetro por el que circulara un líquido viscoso almacenado en un depósito (fig. 14.12) y en él instaláramos tubos verticales, los niveles que alcanzaría el líquido en éstos determinarían una recta como la indicada, a causa de la pérdida de carga

$$p - p' = \frac{8 \eta G}{\pi a^4} l$$

que es proporcional a la longitud recorrida, al gasto, al coeficiente de viscosidad e inversamente proporcional a la *cuarta potencia* del radio.

14.8 Régimen turbulento. El régimen laminar descrito en el apartado anterior sólo es estable a velocidades relativamente pequeñas. A velocidades superiores a un cierto valor crítico, las líneas de corriente dejan de ser paralelas al eje del tubo y se forman remolinos que mezclan el líquido próximo a las paredes con el existente, en un instante, en la proximidad del eje. Se dice que se tiene un *régimen turbulento*. La velocidad crítica mencionada depende de la naturaleza del líquido y del diámetro del tubo, y así los estudios realizados por REYNOLDS le llevaron a la conclusión de que cuando la cantidad

$$R = \frac{v\,d}{\eta}\rho \tag{14.18}$$

era inferior a 2400, el régimen turbulento no puede persistir. En la ecuación 14.18, v es la celeridad media que se obtiene dividiendo el gasto por la sección del tubo, d es el diámetro de éste, ρ la densidad del líquido y η su coeficiente de viscosidad. R resulta ser un número abstracto al que se da el nombre de *número de Reynolds*.

El régimen laminar puede tener lugar para valores del número de Reynolds superiores a 2400, pero es inestable. Cualquier percusión aplicada al tubo, o una leve agitación del líquido a la entrada, basta para provocar el paso a régimen turbulento.

14.9. Resistencia de un fluido al movimiento de un cuerpo. Cuando un cuerpo se mueve a través de un fluido, éste ejerce sobre aquél una fuerza que se opone al movimiento, la cual sólo depende del movimiento relativo entre cuerpo y fluido. Este hecho nos permite considerar, en vez del cuerpo en movimiento a través del fluido, a éste en movimiento de sentido opuesto y el cuerpo en reposo. Los razonamientos y experiencias que realicemos de esta manera nos conducirán al mismo valor de la fuerza resistente.

Imaginemos que en un líquido viscoso abandonamos una bolita sólida más densa que el líquido. Observaremos que empieza a descender y pronto alcanza una velocidad de régimen en su caída que se mantendrá invariable. Las leyes de la Mecánica (§ 7.1) nos dicen que la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre la bolita ha de ser nula, pues su velocidad permanece constante. Es decir, que la resistencia del líquido ha de equilibrar a la fuerza peso — empuje. En un principio no la equilibraba, pues la bola se aceleró desde el reposo hasta alcanzar la velocidad de régimen, luego la fuerza de resistencia ha de depender de la velocidad. El caso que acabamos de mencionar fue estudiado por STOKES, quien obtuvo para la fuerza de re-

sistencia de un fluido al movimiento de una esfera en su seno la expresión

$$F = 6\pi\eta a v \tag{14.19}$$

donde a es el radio de la esfera, v su celeridad y η el coeficiente de viscosidad del fluido.

Si llamamos d a la densidad del fluido y ρ a la de la esfera e igualamos la fuerza (peso — empuje) con la F de la ecuación 14.19, tendremos para la velocidad de régimen

$$v_r = \frac{2}{9}\frac{(\rho - d)\, g\, a^2}{\eta} \tag{14.20}$$

El caso anterior y el de los cuerpos de otras formas cuyo movimiento relativo al fluido sea muy lento, vienen caracterizados por el hecho de que el fluido en contacto con la superficie del cuerpo impregna a éste formando una capa en reposo respecto a él y podemos considerar que el resto del fluido se mueve con régimen laminar ejerciendo sobre la capa impregnante las fuerzas de viscosidad que se oponen al movimiento relativo. En tal caso decimos que se trata de *resistencias viscosas* y, aun cuando la ecuación 14.19 sólo vale si el cuerpo es esférico, la fuerza resistente resulta siempre ser proporcional al coeficiente de viscosidad y a la celeridad.

Ahora bien, si la velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido alcanza valores mayores, el régimen laminar antes aludido se destruye y se forman remolinos en la parte posterior del cuerpo en movimiento. Estos remolinos suelen aparecer de dos en dos girando en sentidos opuestos, con lo que se conserva el momento cinético total del sistema, pero poseen una energía cinética de rotación que toman de la energía cinética del cuerpo, la cual se verá así disminuida.

La fuerza de resistencia al movimiento resulta, pues, debida a causas distintas que antes, las fuerzas de viscosidad resultan despreciables frente a las nuevas fuerzas puestas en juego, llamadas *resistencias hidráulicas,* y como ahora intervienen las masas de fluido que roban energía, es lógico que la densidad del fluido juegue un papel importante. Resulta así que la fuerza resistente viene dada por

$$F = k\frac{\rho v^2}{2} A \tag{14.21}$$

donde A es el área de la proyección del cuerpo sobre un plano normal al movimiento, ρ la densidad del fluido y k un *coeficiente de*

forma que depende de la forma y orientación del cuerpo. En la figura 14.13, el valor de k del cuerpo (a) sería el mayor de los tres y sería unas cien veces mayor que la k del (c).

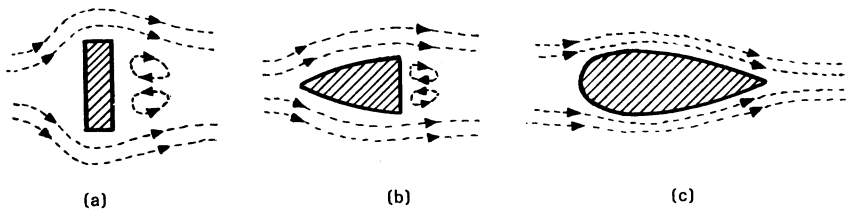


FIG. 14.13

En la región central de la parte trasera, los remolinos ejercen una succión que tiraría hacia adelante de cualquier cuerpo colocado allí. Por eso en el ciclismo tras moto se alcanzan velocidades tan elevadas.

15

Leyes de semejanza en la mecánica

La construcción y diseño de prototipos requiere frecuentemente la experimentación previa sobre modelos reducidos en los que pueden realizarse medidas de diversas magnitudes, las cuales se traducen en valores que tendrían dichas magnitudes en el prototipo. Las relaciones existentes entre las magnitudes físicas en el modelo y las correspondientes en el prototipo obedecen a ciertas reglas de semejanza cuyo fundamento vamos a estudiar.

15.1 Semejanza geométrica. El concepto de semejanza geométrica es conocido de todos desde los primeros estudios de Geometría. Se dice que dos figuras o sistemas de puntos son *semejantes geométricamente* si entre sus puntos puede establecerse una correspondencia biunívoca tal que dos segmentos homólogos cualesquiera guarden entre sus longitudes una razón constante λ. De aquí se sigue la igualdad de ángulos homólogos y la proporcionalidad de las áreas y volúmenes con razones λ^2 y λ^3 respectivamente. A λ se le llama *escala de longitudes.*

15.2 Tiempos homólogos. En ocasiones, la duración de un fenómeno en el prototipo no es exactamente igual que en el modelo y ello obliga a establecer una *escala de tiempos.* Así, por ejemplo, en un modelo de estuario pueden producirse mareas de un período de 5 minutos, mientras que en el prototipo el período es de 12 horas.

De esta manera, si en el modelo se considera un fenómeno que tiene lugar entre los instantes t_0 y t_1 y el fenómeno correspondiente tiene lugar en el prototipo entre los instantes t_0' y t_1', la escala de tiempos será

$$\tau = \frac{t_1 - t_0}{t_1' - t_0'} \tag{15.1}$$

y llamaremos *homólogos* a los tiempos t para el modelo y t' para el prototipo, que cumplan la relación

$$t - t_0 = \tau\,(t' - t_0') \tag{15.2}$$

de donde

$$dt = \tau\, dt' \tag{15.3}$$

15.3 Semejanza cinemática. Establecidas la semejanza geométrica y la correspondencia entre tiempos en dos sistemas, podemos combinarlas para definir la *semejanza cinemática.* Sean S y S' dos sistemas de puntos en correspondencia biunívoca y que estén en movimiento respecto a tres ejes que constituyan el triedro trirrectángulo $OXYZ$, S en el intervalo de tiempo (t_0, t_1) y S' en el (t_0', t_1') y establezcamos entre los instantes de dichos intervalos la correspondencia definida por las ecuaciones 15.1 y 15.2.

Sean T y T' dos triedros trirrectángulos inmóviles respecto a $OXYZ$ (fig. 15.1). Las figuras que forman los puntos del sistema S con el triedro T y los de S' con T' variarán de un instante a otro al

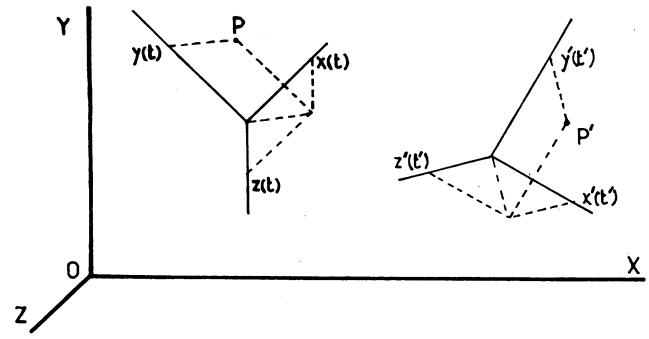


FIG. 15.1 Las figuras que forman con los triedros los puntos homólogos P y P' son semejantes en tiempos homólogos.

moverse los puntos y no los triedros. Si podemos hallar dos triedros T y T' tales que, en cada par de instantes correspondientes, las figuras (S, T) y (S', T') sean semejantes geométricamente con una escala de longitudes λ constante, diremos que los sistemas S y S' son *semejantes cinemáticamente.*

Consideremos un punto P de S y su homólogo P' de S' y llamemos x-y-z a las coordenadas de P respecto a T y x'-y'-z' a las de P' respecto a T'. Si S y S' presentan semejanza cinemática, las

figuras (P, T) y (P', T') en tiempos homólogos deberán ser semejantes geométricamente y si es λ la razón de semejanza deberá ser (fig. 15.1):

$$x(t) = \lambda\, x'(t') \qquad y(t) = \lambda\, y'(t') \qquad z(t) = \lambda\, z'(t') \tag{15.4}$$

de donde resulta que *las trayectorias de puntos homólogos son semejantes geométricamente,* pues las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de P serían

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

y las de la trayectoria de P' serían

$$x' = x'(t') \qquad y' = y'(t') \qquad z' = z'(t')$$

y como las ecuaciones 15.4 se cumplen para cada par de instantes homólogos, al eliminar t y t' de estas ecuaciones paramétricas queda

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \lambda$$

El lector puede darse cuenta de que si lleváramos a coincidir los triedros T y T', esta última relación indicaría homotecia entre las figuras.

Derivemos las ecuaciones 15.4 respecto a t y tengamos en cuenta que el segundo miembro depende de t a través de t':

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{dy'}{dt'}\frac{dt'}{dt} \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda \frac{dz'}{dt'}\frac{dt'}{dt}$$

y teniendo en cuenta la ecuación 15.3

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\, \tau^{-1} \frac{dx'}{dt'} \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda\, \tau^{-1} \frac{dy'}{dt'} \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda\, \tau^{-1} \frac{dz'}{dt'} \tag{15.5}$$

Los primeros miembros son las componentes del vector $\mathbf{v}$, velocidad de P en el instante t, que son proporcionales a los cosenos directores de $\mathbf{v}$. Los segundos miembros son el producto de la constante $\lambda\, \tau^{-1}$ por las componentes de $\mathbf{v}'$, velocidad de P' en el instante homólogo t' y por tanto son proporcionales a los cosenos directores de $\mathbf{v}'$. Luego las ecuaciones 15.5 nos indican que *las velocidades de dos puntos homólogos tienen, en instantes homólogos, direcciones y sentidos también homólogos en la semejanza geométrica existente entre las respectivas configuraciones de las trayectorias.*

También se deduce de las ecuaciones 15.5 que las celeridades cumplen

$$v = \lambda \tau^{-1} v'$$

y por tanto $\lambda \tau^{-1}$ es la *escala de celeridades.*

Derivando las ecuaciones 15.5 respecto a t y teniendo en cuenta la ecuación 15.3 resulta análogamente

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \tau^{-2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda \tau^{-2} \frac{d^2 y'}{dt'^2} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda \tau^{-2} \frac{d^2 z'}{dt'^2} \tag{15.6}$$

de donde se desprende que *las aceleraciones de dos puntos homólogos tienen, en instantes homólogos, direcciones y sentidos también homólogos en la semejanza geométrica existente entre las respectivas configuraciones de las trayectorias y módulos que guardan la razón constante* $\lambda \tau^{-2}$. Ésta será, pues, la *escala de aceleraciones.*

15.4 Semejanza material. Dos sistemas S y S' de puntos materiales en correspondencia biunívoca se dice que son *semejantes materialmente* si las masas de dos elementos correspondientes cualesquiera se hallan en una razón constante μ.

Obsérvese que, en el caso de sistemas semejantes geométricamente, la semejanza material se realiza de la manera más sencilla construyendo con el mismo material los elementos homólogos.

15.5 Semejanza dinámica. Si los sistemas S y S' citados en el § 15.3 presentan semejanza material además de semejanza cinemática, se dice que son *semejantes dinámicamente.* En tal caso, si es m la masa de P, $\mathbf{F}$ la fuerza que actúa sobre él y m' la masa de P' que está sometido a una fuerza $\mathbf{F}'$, la segunda ley de Newton (ec. 7.4) impone que $\mathbf{F}$ tenga igual dirección y sentido que $\mathbf{a}$, y lo mismo ocurrirá con $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{a}'$. Pero como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ tienen, en instantes homólogos, direcciones y sentidos que se corresponden en la semejanza geométrica, lo mismo ocurrirá con $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$. Además,

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \frac{a}{a'} \qquad \text{o sea} \qquad \varphi = \mu \lambda \tau^{-2} \tag{15.7}$$

donde φ es la *escala de fuerzas* y la ecuación 15.7 constituye la *ley de semejanza de Newton.* En ella vemos que, fijadas al arbitrio tres escalas, la cuarta queda determinada automáticamente.

De manera análoga a como se ha establecido la escala de fuerzas

podría establecerse la escala de cualquier otra magnitud mecánica, pues las dimensiones de ésta siempre pueden ponerse en función de las de longitud, masa y tiempo.

Como, por lo general, lo que se conoce es la razón δ de las densidades de las partes homólogas de los dos sistemas, en vez de la escala de masas, tendremos

$$\delta = \frac{\rho}{\rho'} \qquad \text{y} \qquad \mu = \frac{m}{m'} = \frac{\rho V}{\rho' V'} = \delta \lambda^3 \tag{15.8}$$

sustituyendo la ecuación 15.8 en la 15.7 resulta

$$\varphi = \delta \lambda^4 \tau^{-2} \tag{15.7 \textit{bis}}$$

que constituye otra expresión de la ley de semejanza de Newton.

Ejemplo: Consideremos una máquina prototipo S' y su modelo S que sean semejantes geométrica, material y cinemáticamente. Sea $\lambda = 1/10$ la escala de longitudes y supongamos que un émbolo en el modelo efectúa todo un ciclo en un tiempo tres veces menor que el prototipo, es decir, según la ecuación 15.1, $\tau = 1/3$. La escala de celeridades será, pues, 3/10, lo que significa que todo punto del modelo lleva una celeridad que es 3/10 de la del punto homólogo del prototipo en el instante homólogo. La escala de aceleraciones será 9/10, o sea que cada punto del modelo tendrá una aceleración que será 9/10 de la del punto homólogo del prototipo en el instante homólogo. Si modelo y prototipo están construidos del mismo material, $\delta = 1$ y la ecuación 15.9 nos da $\varphi = 9/10^4$, o sea que las fuerzas que se ejercen sobre el émbolo del modelo son 9/10 000 de las fuerzas que se ejercen sobre el del prototipo en los instantes homólogos. No obstante, entre las presiones de los cilindros de S y S' no hay correspondencia determinada, pues dichas presiones las definen los pares resistentes que hay que vencer.

15.6 Generalización del concepto de semejanza. La misión del modelo estriba en medir sobre él cada magnitud y de esta medida deducir el valor correspondiente de dicha magnitud en el prototipo, empleando la escala correspondiente. Pero no es siempre posible. Si construimos un modelo S de una máquina S' que sea semejante no sólo geométricamente, sino también materialmente, construyendo las partes homólogas con el mismo material, como los pesos son proporcionales a los volúmenes respectivos, la escala de pesos deberá ser λ^3 y no podrá haber semejanza dinámica entre S y S' a menos que todas las fuerzas homólogas restantes guarden entre sí la misma razón λ^3. Esto no sería obligatorio, claro está, si pudiera despreciarse la influencia del peso en el funcionamiento de la máquina.

En muchos casos, sin embargo, intervienen ciertos tipos de fuer-

zas (por ejemplo, resistencias pasivas) que por su naturaleza no pueden variar de S a S' guardando la razón constante λ^3. Entonces puede intentarse superar las dificultades renunciando a la semejanza geométrica, o bien a la material modificando convenientemente la constitución material de los diferentes órganos del modelo, las condiciones de funcionamiento, etc.

Consideremos de nuevo los triedros T y T' de la figura 15.1 a los que referimos modelo y prototipo, respectivamente. La ecuación 15.1 define la escala de tiempos, pero las coordenadas de los puntos homólogos en instantes homólogos guardarán ahora las relaciones siguientes:

$$x(t) = \lambda_x x'(t') \qquad y(t) = \lambda_y y'(t') \qquad z(t) = \lambda_z z'(t')$$

donde las escalas de longitudes tomadas en la dirección x, en la y o en la z son, en general, diferentes. Si fueran iguales, modelo y prototipo presentarían semejanza geométrica.

En ocasiones se hace $\lambda_x = \lambda_y \neq \lambda_z$ y al cociente λ_z/λ_x se le da el nombre de *coeficiente de distorsión.*

En general, se dirá que las funciones $f(x, y, z, t)$ y $f'(x', y', z', t')$ son semejantes si el cociente f/f' es constante cuando las funciones se calculan en puntos homólogos e instantes homólogos. Dicha constante es la escala para la función f. Por ejemplo, si f y f' representan la distribución de temperaturas entre los puntos del modelo y del prototipo, respectivamente, y se cumple la constancia mencionada, los dos sistemas se dice que son *semejantes térmicamente.*

El hecho de ser λ_x, λ_y y λ_z diferentes hará que se defina una escala diferente para cada componente de la velocidad y análogamente para las de la aceleración, que serán, respectivamente,

$$\lambda_x \tau^{-1} \qquad \lambda_y \tau^{-1} \qquad \lambda_z \tau^{-1}$$

y

$$\lambda_x \tau^{-2} \qquad \lambda_y \tau^{-2} \qquad \lambda_z \tau^{-2}$$

y la semejanza dinámica se generaliza considerando para las escalas de las componentes de las fuerzas

$$\varphi_x = \lambda_x \tau^{-2} \mu \qquad \varphi_y = \lambda_y \tau^{-2} \mu \qquad \varphi_z = \lambda_z \tau^{-2} \mu$$

También hemos mencionado la posibilidad de renunciar a la semejanza material. Esto es lo que convendría hacer si quisiera ensayarse sobre modelo reducido una estructura. Cada una de las partes del modelo la construiríamos del mismo material que la parte ho-

móloga del prototipo, pues lo que pretendemos es ver si la estructura es capaz de resistir las cargas. Para ello convendrá que los esfuerzos internos existentes en el modelo sean los mismos que en el prototipo. Vimos en el capítulo 9 que estos esfuerzos son el cociente de una fuerza por una superficie, por lo que deberá ser

$$\frac{F}{S} = \frac{F'}{S'}$$

o sea

$$\frac{F}{F'} = \frac{S}{S'} \qquad \text{de donde} \qquad \varphi = \lambda^2$$

En este caso, el peso de la estructura interviene de manera fundamental y la escala de pesos es λ^3 y no λ^2. Sacrificaremos, pues, la semejanza material y cargaremos el modelo con pesos correctivos Δp hasta conseguir que la razón de pesos homólogos sea igual a λ^2, o sea

$$\frac{p + \Delta p}{p'} = \lambda^2 \qquad \text{y como} \qquad \frac{p}{p'} = \lambda^3$$

resulta

$$\Delta p = p\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Así, por ejemplo, si la escala de longitudes es 1/15, habría que cargar el modelo con 14 veces su peso propio para conseguir los mismos esfuerzos internos en el modelo que en el prototipo.

15.7 Grupos adimensionales. Indicamos ya en § 7.2 que las ecuaciones que representan leyes físicas deben ser homogéneas dimensionalmente. Por tanto, dividiendo los dos miembros de una de dichas ecuaciones por una cierta magnitud física (o por un producto adecuado de magnitudes físicas) de iguales dimensiones que los términos de la ecuación, ésta se convertirá en una relación entre términos abstractos llamados *grupos adimensionales*.

Una de las ventajas de la utilización de éstos es que una ecuación homogénea dimensionalmente con varias variables puede reducirse a otra ecuación entre un número menor de productos adimensionales.

Por otra parte, la experimentación sobre modelos se simplifica mucho al poder expresar sus resultados mediante números abstractos. Por ejemplo, queremos estudiar la fuerza sustentadora de un ala de avión que sabemos dependerá del área A de su superficie, de la den-

sidad del aire ρ, de su velocidad relativa al ala v y del ángulo de ataque α de ésta. Es decir,

$$F = F(A, \rho, v, \alpha)$$

Podríamos llevar a una gráfica los resultados de las medidas realizadas sobre modelo en un túnel aerodinámico, poniendo F en ordenadas y α en abscisas y manteniendo constantes las otras tres variables, con lo que podríamos trazar una curva. Repitiendo lo anterior para un nuevo valor de v, por ejemplo, trazaríamos otra y así sucesivamente, llegando tras muchas medidas a tener una familia de gráficas (F, α) con v como parámetro. Pero todas ellas corresponden a un valor único de A y otro de ρ. Podríamos, entonces, trazar otra familia de curvas (F, α) con A como parámetro, después otra con ρ como parámetro, etc. La experimentación sería muy penosa. En cambio, si formamos el grupo adimensional *

$$\pi = \frac{F}{A \rho v^2} \tag{15.9}$$

el teorema de π (cfr. § 15.8) nos indica que el estudio de este problema se reduce a una relación funcional entre π y α (que también carece de dimensiones). Así, fijando α, se miden las otras cuatro variables en condiciones cualesquiera y ello nos da el valor de π correspondiente al fijado para α. Cambiando éste obtendremos un nuevo valor de π, etc., y de esta manera trazaríamos la curva $\pi = \pi(\alpha)$. Con esta curva *única* conocemos el valor de π para cada ángulo de ataque y la fuerza sustentadora será, según la ecuación 15.9,

$$F = \pi A \rho v^2$$

En la práctica se suele poner α en ordenadas y π en abscisas y la gráfica obtenida recibe el nombre de *curva característica* del perfil de sustentación. Se comprende que será válida para todos los perfiles semejantes dinámicamente.

15.8 Teorema de π o de Buckingham. No todos los casos que se presenten en la Mecánica de modelos serán tan sencillos como el dado en § 15.7, por lo que convendrá saber cuántos grupos adimensionales independientes hay que formar con las variables del proble-

* La ecuación 14.21 nos enseña que numerador y denominador de la ecuación 15.9 son de iguales dimensiones.

ma. En el ejemplo del § 15.7, π y α eran independientes, pues no pueden relacionarse mediante operaciones algebraicas, ya que α no figura en π. El teorema de π nos indica cuál es el número de grupos adimensionales independientes, pero antes de enunciarlo convendrá precisar algunos conceptos.

1.° Las dimensiones consideradas fundamentales, *MLT* en el sistema giorgi, *FLT* en el terrestre (cfr. §§ 7.2 y 7.15) deben ser verdaderamente independientes. Es decir, que dos de ellas no guarden siempre la misma relación como ocurriría si, por ejemplo, masa y tiempo aparecieran siempre juntas bajo la forma de masa por unidad de tiempo (M/T). En este caso, tendríamos sólo dos dimensiones fundamentales: L y (M/T).

2.° Coloquemos en una fila horizontal las variables que intervienen en el problema y en una columna las dimensiones fundamentales. Formemos una matriz que tenga por columnas los exponentes a que están afectadas las dimensiones fundamentales en la variable correspondiente de la fila horizontal antes mencionada. Así, para el caso citado en § 15.7 tendríamos

	F	A	ρ	v	α
M	1	0	1	0	0
L	1	2	—3	1	0
T	—2	0	0	—1	0

Dicha matriz recibe el nombre de *matriz dimensional.*

Pues bien, el teorema de π, que no vamos a demostrar, nos dice que *el número de grupos adimensionales independientes que servirán para el estudio de un fenómeno es igual al número de variables que intervienen, menos el número de dimensiones fundamentales.* Este último número, demuestra LANGHAAR * que es igual a la característica de la matriz dimensional. Por su parte, VAN DRIEST ** demuestra que coincide con el número máximo de variables que no pueden dar un producto adimensional. Así, recomienda se tomen todas las variables y, si no forman producto adimensional, ensayar con una menos, etc.

15.9 Número de Newton-Euler. El grupo adimensional dado por la ecuación 15.9 se conoce con el nombre de *número de Newton* y

* LANGHAAR, H. L.: *Analyse dimensionnelle et théorie des maquettes.* Dunod, París (1956).

** VAN DRIEST, E. R.: «On dimensional analysis and the presentation of data in fluid flow problems», *J. Appl. Mech.*, **13**, A-34 (1946).

vamos a estudiar su significado con toda generalidad. Consideremos un prototitpo y su modelo semejantes dinámicamente. En tal caso se cumplirá la ecuación 15.7 *bis* que podremos transformar de la manera siguiente

$$\varphi = \delta \lambda^4 \tau^{-2} = \delta \lambda^2 (\lambda \tau^{-1})^2 \tag{15.10}$$

y como λ^2 es la escala de áreas y $\lambda \tau^{-1}$ la de celeridades, la ecuación 15.10 equivale a escribir

$$\frac{F}{F'} = \frac{\rho A v^2}{\rho' A' v'^2}$$

y permutando los medios

$$\frac{F}{\rho A v^2} = \frac{F'}{\rho' A' v'^2} = \pi_N$$

de donde se deduce que todos los sistemas que sean semejantes dinámicamente tendrán el mismo número de Newton.

Como la ecuación 15.7 *bis* es consecuencia directa de la segunda ley de Newton, se comprende que será aplicable a todos los fenómenos en que las fuerzas de inercia jueguen un papel preponderante. Ahora bien, si además intervienen resistencias de tipo hidráulico, también es inmediata su aplicación en virtud de la expresión de dichas resistencias (ec. 14.21). Claro está que, en este caso, δ es la razón de las densidades de los fluidos por donde se mueven los cuerpos modelo y prototipo y no la razón de las densidades de éstos.

Como en los problemas de Mecánica de fluidos intervienen frecuentemente juntas la fuerza y la superficie en forma de presión $p = F/A$, el número de Newton se escribe frecuentemente en la forma

$$\pi_E = \frac{p}{\rho v^2}$$

conocida por el nombre de *número de Euler*.

15.10 Número de Froude. Consideremos ahora un fenómeno en el que intervengan de manera preponderante las fuerzas de inercia y las *fuerzas másicas* (cfr. § 13.2).

La escala de fuerzas másicas será

$$\varphi = \frac{m g}{m' g'} = \delta \lambda^3 \frac{g}{g'} \tag{15.11}$$

donde $m\,\mathbf{g}$ es la fuerza másica que se ejerce sobre la masa m del modelo y $m'\,\mathbf{g}'$ la que se ejerce sobre la masa homóloga m' del prototipo. Es interesante observar que $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ pueden ser iguales o diferentes. A esto último correspondería el caso de un modelo en la Tierra de un prototipo que debiera funcionar en la Luna.

Como la escala de fuerzas másicas ha de ser igual a la de fuerzas de inercia, por ser estos dos tipos los preponderantes en el fenómeno, igualaremos las ecuaciones 15.7 *bis* y 15.11 y queda

$$\lambda\,\tau^{-2} = g/g'$$

o, lo que es igual,

$$1 = \lambda\,\tau^{-2}\,\frac{g'}{g} = \frac{\dfrac{v^2}{l\,g}}{\dfrac{v'^2}{l'\,g'}}$$

de donde resulta el grupo adimensional

$$\pi_F = \frac{v^2}{l\,g} = \frac{v'^2}{l'\,g'}$$

que es el *número de Froude*. De esta expresión se deduce que *los sistemas semejantes dinámicamente en los que intervengan de manera esencial fuerzas másicas y de inercia tienen el mismo número de Froude.*

15.11 Número de Weber. Cuando además de las fuerzas de inercia actúan las fuerzas de tensión superficial, la escala de éstas será

$$\varphi = \frac{\sigma\,l}{\sigma'\,l'} = \frac{\sigma}{\sigma'}\,\lambda \qquad (15.12)$$

Siendo semejantes dinámicamente los sistemas, la escala de fuerzas debe cumplir con la ecuación 15.10. Igualando a ésta, pues, la ecuación 15.12 queda

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{l}{l'}\,\frac{v^2}{v'^2}$$

de donde se obtiene el *número de Weber*

$$\pi_W = \frac{\rho\,v^2\,l}{\sigma} = \frac{\rho'\,v'^2\,l'}{\sigma'}$$

15.12 Número de Reynolds. Sean dos sistemas semejantes dinámicamente, lo cual entraña que ambos tengan el mismo número de Euler. Si además de las fuerzas de inercia intervienen fuerzas de viscosidad u otras fuerzas expresadas por una ecuación formalmente igual a la de estas últimas cuya expresión es, según indica la ecuación 14.14,

$$dF = \eta \frac{dv}{dy} dS \qquad \text{y} \qquad dF' = \eta' \frac{dv'}{dy'} dS'$$

su escala será

$$\varphi = \frac{\eta}{\eta'} \frac{\dfrac{dv}{dy} dS}{\dfrac{dv'}{dy'} dS'} = \frac{\eta}{\eta'} \lambda^2 \tau^{-1} \tag{15.13}$$

Ahora bien, en Dinámica de fluidos acostumbra a introducirse el *coeficiente de viscosidad cinemática*

$$\nu = \frac{\eta}{\rho^*}$$

donde ρ^* es la densidad del fluido. La ecuación 15.13 quedará, pues, en la forma

$$\varphi = \frac{\nu}{\nu'} \frac{\rho^*}{\rho'^*} \lambda^2 \tau^{-1}$$

que igualándola con la ecuación 15.7 *bis* da

$$\frac{\rho}{\rho'} \lambda^4 \tau^{-2} = \frac{\nu}{\nu'} \frac{\rho^*}{\rho'^*} \lambda^2 \tau^{-1}$$

Si las densidades correspondientes en modelo y prototipo fueran iguales, queda

$$\frac{\nu'}{\nu} \lambda^2 \tau^{-1} = 1$$

o lo que es igual

$$\frac{\dfrac{v\,l}{\nu}}{\dfrac{v'\,l'}{\nu'}} = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{v\,l}{\nu} = \frac{v'\,l'}{\nu'} = \pi_R$$

que es el *número de Reynolds* ya mencionado en el § 14.8.

Deducimos, pues, que si dos fluidos en movimiento constituyen dos sistemas semejantes dinámicamente, han de tener respectivamente iguales sus números de Euler y sus números de Reynolds.

15.13 Número de Mach. Consideremos una onda que se propaga por un fluido. En este caso, además de las fuerzas de inercia intervendrán las fuerzas debidas a las compresiones originadas por la onda, las cuales pueden originar variaciones importantes de la densidad del fluido cuando éste lleve celeridades suficientemente elevadas.

La compresión dp que ejerce la onda puede despejarse de la ecuación 13.13

$$dp = -\chi \frac{dV}{V}$$

que originaría sobre una superficie de área A una fuerza

$$A\,dp = -\chi \frac{dV}{V} A$$

Como dV/V es abstracto, la escala de fuerzas sería

$$\varphi = \frac{\chi}{\chi'} \lambda^2$$

que igualada con la ecuación 15.10 da

$$\frac{\chi}{\chi'} = \frac{\rho}{\rho'} (\lambda \tau^{-1})^2$$

de donde resulta el grupo adimensional

$$\frac{\rho v^2}{\chi} = \frac{\rho' v'^2}{\chi'}$$

cuya raíz cuadrada también será adimensional

$$\frac{v}{\sqrt{\frac{\chi}{\rho}}} = \frac{v'}{\sqrt{\frac{\chi'}{\rho'}}} = \pi_M$$

Pero el denominador no es sino la celeridad de propagación de la onda por el fluido (cfr. ec. 11.6), por lo que este grupo adimensional llamado *número de Mach* resulta ser

$$\pi_M = \frac{v}{b}$$

siendo b la celeridad de propagación de la onda acústica.

15.14 Número de Cauchy. Cuando intervengan de manera esencial fuerzas de inercia y elásticas, la igualación entre sus escalas da lugar a una ley de semejanza elástica debida a CAUCHY (1789-1857).

El punto de partida de toda la teoría de la Elasticidad lo constituye la elasticidad por tracción (cfr. § 9.2) y las fuerzas elásticas en modelo y prototipo serán, según la ecuación 9.1,

$$F = E\,S\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{y} \qquad F' = E'\,S'\frac{\Delta l'}{l'}$$

y como $\Delta l/l$ es abstracto, su escala será, haciendo $\zeta = E/E'$,

$$\varphi = \zeta\,\lambda^2$$

que igualada con la ecuación 15.10 da

$$\zeta = \delta\,\lambda^2\,\tau^{-2}$$

que es la *ley de semejanza elástica*. Escribamos esta ecuación en la forma

$$\frac{(\lambda\,\tau^{-1})^2}{\dfrac{\zeta}{\delta}} = 1$$

lo cual equivale a

$$\frac{\dfrac{v^2}{v'^2}}{\dfrac{E}{E'}\dfrac{\rho'}{\rho}} = 1$$

de donde

$$\frac{v^2}{E/\rho} = \frac{v'^2}{E'/\rho'}$$

la raíz cuadrada de este grupo adimensional también carece de dimensiones y recibe el nombre de *número de Cauchy*:

$$\pi_C = \frac{v}{\sqrt{E/\rho}}$$

El denominador no es sino la celeridad de propagación de las ondas longitudinales por los sólidos (cfr. ec. 11.7).

15.15 Empleo de los grupos adimensionales. Cuando se quiera realizar ensayos sobre modelo, si se conocen las variables que intervienen en el fenómeno que se estudia, el teorema de π nos dirá cuántos grupos adimensionales independientes deben tenerse en cuenta. Éstos podrán, por lo general, ponerse en función de los números estudiados en los apartados anteriores y la índole del fenómeno ya nos sugerirá qué números son los convenientes. Se trata entonces de poner uno de ellos en función de los demás y establecer la correspondencia entre los valores de aquél y los de éstos obtenidos de las medidas efectuadas sobre el modelo, de manera análoga a como se hizo en el ejemplo del § 15.7.

16

Calor y cambios de estado

16.1 Temperatura. Es de uso común la locución «caliente» o «frío» aplicada a los cuerpos que ponemos en contacto con nuestra piel. Esta noción es puramente cualitativa y subjetiva y siempre que hablamos de ello lo hacemos con relación a nuestra impresión sensorial. También podemos expresar que un cuerpo está más caliente que otro o que colocando un recipiente con agua encima de una llama, cada vez está más caliente. Los cuerpos, pues, tienen cierta propiedad que determinamos cualitativamente por el tacto y podremos decir que llevan asociada una magnitud física si es posible medir dicha propiedad de una manera objetiva, independientemente de las sensaciones del observador. A esta magnitud física le llamamos *temperatura* y puede medirse por sus efectos sobre los cuerpos o por las variaciones que origina en distintos fenómenos físicos. En principio, diremos que un cuerpo que percibimos como caliente está a temperatura superior a la de nuestro cuerpo y que si lo percibimos frío posee temperatura inferior.

Si ponemos en contacto dos cuerpos a temperaturas distintas, al cabo de cierto tiempo la temperatura de ambos será la misma y tendrá un valor intermedio entre los iniciales. Decimos que se ha establecido un *equilibrio térmico* entre ellos. Colocando un cuerpo de prueba en contacto con otro, al cabo de cierto tiempo tendrá la misma temperatura que el citado cuerpo y, por tanto, si podemos determinar la temperatura del cuerpo de prueba tendremos la temperatura del otro. Podríamos definir la temperatura como cierto «grado térmico» que permite determinar de manera cuantitativa el que un cuerpo esté más caliente que otro.

Para medir la temperatura puede utilizarse cualquier propiedad física que varíe con ella y luego establecer una escala de temperaturas con un cero arbitrario fijo, o bien por consideraciones teóricas.

Entre muchas propiedades físicas que varían con la temperatura tenemos el volumen de un líquido, la longitud de una varilla o la presión de un gas encerrado en una vasija. El dispositivo utilizado, partiendo de aquellas propiedades, para medir la temperatura recibe el nombre de *termómetro* y la sustancia empleada se llama *sustancia termométrica,* la cual poseerá una cierta propiedad termométrica adecuada. El caso más sencillo lo tenemos cuando dicha propiedad es función lineal de la temperatura que vamos a medir con el termómetro.

Vamos a elegir una propiedad termométrica x de manera que la temperatura sea función lineal de x, es decir,

$$f(x) = T(x) = a\,x + b$$

donde a y b son dos constantes. Para $x = 0$, $T(0) = b$ y por tanto

$$T(x) - T(0) = a\,x$$

lo cual indica que a variaciones de x iguales corresponden variaciones iguales de temperatura. Si, en una escala arbitraria, tomamos como valor cero el $T(0)$, tendremos $T(x) = a\,x$ y solamente tendremos que calibrar el termómetro escogiendo determinados *puntos fijos.*

Utilizando como propiedad termométrica la dilatación y como sustancia termométrica un líquido, generalmente mercurio, se construyen los termómetros de uso corriente. En ellos puede considerarse, en primera aproximación, que se cumple la linealidad antedicha para determinados intervalos de temperatura. Un termómetro corriente no puede utilizarse como termómetro patrón. Para éste se toma como propiedad termométrica la variación de presión de un gas ideal que se mantiene a volumen constante. En este caso la presión es directamente proporcional a la temperatura *absoluta,* entendiendo por tal una temperatura para la cual se ha definido un cero, llamado *cero absoluto,* cuya medida no es accesible directamente, pero que puede obtenerse por extrapolación a partir de la curva $T(p) = a\,p$. Para determinar la constante a debemos definir un punto fijo. Antiguamente se tomaba como punto fijo el de fusión del hielo, pero en 1954 la X Conferencia de Pesas y Medidas, celebrada en París, acordó tomar como punto fijo patrón la temperatura en la cual coexisten agua, vapor de agua y hielo a la presión de 4,58 tor y a la que se le asigna arbitrariamente el valor 273,16 K. Esta escala de grados Kelvin es la conocida escala absoluta de temperatura.

En la ecuación anterior podemos escribir $273{,}16 = a\,p_0$, y despejando a y sustituyendo tenemos

$$T(p) = 273{,}16\,\frac{p}{p_0}$$

lo que nos proporciona la temperatura en función de la presión.

En la escala internacional de temperatura se usa la escala del termómetro de gas extrapolada al cero absoluto

$$T = 273{,}16 \lim_{p_0 \to 0} \left(\frac{p}{p_0}\right) \qquad (V = \text{const.})$$

la cual coincide con la escala absoluta Kelvin (cfr. § 17.16) dentro del intervalo en el que puede utilizarse dicho termómetro.

16.2 Calor. Hemos citado el hecho de que al poner en presencia dos cuerpos que se hallen a temperaturas diferentes, el cuerpo más caliente se va enfriando y el otro calentando hasta alcanzar ambos una temperatura común intermedia. En este proceso, es evidente que no se ha cedido temperatura de un cuerpo a otro, pues durante el tiempo en que el más caliente ha disminuido un grado su temperatura, el más frío no habrá aumentado, en general, su temperatura en un grado precisamente. Ahora bien, el estado de un cuerpo se ha alterado a causa de la presencia del otro y lógico es pensar que «algo» ha pasado del cuerpo más caliente al más frío. Según veremos más adelante, este «algo» es energía, pero, por el momento, no necesitamos conocer exactamente su naturaleza y le daremos, simplemente, el nombre de *calor*.

Hagamos constar, no obstante, que lo anterior no niega la posibilidad de que pueda circular calor de un cuerpo frío a otro más caliente. Más adelante veremos en qué condiciones puede ocurrir esto.

La primera interpretación del hecho anteriormente citado la dio Joseph Black (1728-1799), quien supuso que los cuerpos contenían un fluido, al que dio el nombre de *calórico*, que suponía no podía destruirse ni crearse pero que al cederlo el cuerpo disminuía su temperatura y que cuando lo absorbía la aumentaba.

Basándose en esta hipótesis, Black llegó a la conclusión, tras una experimentación laboriosa, de que la cantidad Q de calor que ha de absorber un cuerpo para elevar su temperatura en Δt es igual a la que cede al disminuir su temperatura en la misma cantidad y es proporcional a la masa m del cuerpo y al salto de temperatura, es decir:

$$Q = c\,m\,\Delta t \qquad (16.1)$$

Se supone que al sufrir la variación Δt de temperatura, el cuerpo no cambia su estado de agregación. El coeficiente c de la ecuación 16.1 es una cantidad característica de la sustancia de que está constituido el cuerpo y recibe el nombre de *calor específico* de dicha sustancia. Su significado físico lo tenemos haciendo en la ecuación 16.1 $m = 1$ y $\Delta t = 1$, es decir, *es la cantidad de calor que hay que suministrar a la unidad de masa de dicha sustancia para elevar su temperatura un grado.*

Asignando arbitrariamente el valor uno al calor específico del agua, se introdujo como unidad de calor la *caloría* como cantidad de *calor que hay que suministrar a 1 g de agua para elevar su temperatura un grado.*

Al perfeccionarse el estudio de los calores específicos, se puso de manifiesto que no son totalmente independientes de la temperatura, por lo que la definición anterior de caloría no resultaba precisa. Ello hizo que se definieran pequeñas variantes de la caloría, tales como la *caloría de 15,* en la que se precisa que la elevación de temperatura sea de 14,5°C a 15,5°C, y la *caloría media,* que es la centésima parte de la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua líquida de 0°C a 100°C.

TABLA 16.1 CALORES ESPECÍFICOS

Sustancia	Temperatura °C	Calor específico cal/g° C	Calor específico $J \cdot kg^{-1} K^{-1}$
Alcohol etílico	25	0,581	2427,8
Aluminio	20	0,214	895,8
Cobre	20	0,092	385,1
Glicerina	0	0,540	2260,4
Hielo	—20 a 0	0,48	2009,2
Hierro (colado)	20 a 100	0,119	498,1
Mercurio	20	0,033	138,4
Plomo	20	0,031	129,6
Vap. de agua (a la presión atmosférica)	100 a 200	0,48	2009,2
Wolframio	20 a 100	0,034	142,3

La teoría del calórico permitió avanzar mucho en el estudio de fenómenos tales como los cambios de estado (§§ 16.4 y sigs.) y las leyes de la Calorimetría empleadas actualmente se dedujeron de aquélla. No obstante, presentaba un fallo desde su principio: el calor no es un fluido contenido en los cuerpos. Uno de los primeros en sospecharlo fue el CONDE DE RUMFORD (1753-1814), quien estando encargado de la fabricación de cañones para el Elector de Baviera

se sorprendió ante la gran cantidad de calor que se desprendía continuamente al horadarlos. Si el calor fuera un fluido contenido en el cañón, cuanto más materia hubiera en él, tanto más calórico debería contener y en cambio resultaba que al perforarlo y arrancar, en consecuencia, materia, parecía existir más calórico en el cañón. Esto le llevó a decir: «Me parece muy difícil, si no imposible, formar una idea clara de algo capaz de ser excitado y comunicado de la manera en que se ha excitado y comunicado en estos experimentos el calor, a no ser que éste fuera movimiento». Con esto quería significar RUMFORD que el movimiento de la broca del taladro se convertía en calor que comunicaba al cañón, cosa que le había sugerido la vieja teoría de ARISTÓTELES de que el movimiento es la causa del calor. En todo caso, parecía evidente que el calor no podía ser un fluido, a menos que se admitiera que éste pudiera ser creado a partir de algo no material, cosa que ya BLACK se había visto obligado a admitir.

Los caloristas, seguidores de BLACK, creían que el calor contenido en una masa de agua era mayor que el contenido en una masa igual de hielo porque para fundirse éste absorbe una gran cantidad de calor sin variar su temperatura (cfr. § 16.5). SIR HUMPHRY DAVY negó tal creencia al realizar el siguiente experimento: frotó vigorosamente, durante unos minutos, dos pedazos de hielo a —2°C en un ambiente a igual temperatura y recogió una masa de agua líquida a unos +2°C, observando la desaparición de una masa igual de hielo. Era evidente que, para que esto ocurriera, la masa de hielo que se fundía debía absorber calor y también era evidente que no se le había suministrado, pues el ambiente seguía estando a —2°C. Sólo cabía pensar que este calor fuera originado por el movimiento y DAVY apuntó la posibilidad de que el calor fuera una vibración de los corpúsculos que tiendan a separarse en un cuerpo.

De todo lo anterior resulta claro que carece de sentido decir que un cuerpo *contiene* calor.

Pasó casi medio siglo, aún, antes de que se revelara la verdadera naturaleza del calor. JULIUS ROBERT MAYER (1814-1878) dedujo por consideraciones filosóficas que el calor debía ser una forma de energía y poco después JAMES PRESCOTT JOULE (1818-1889) desarrolló una sucesión sistemática de experimentos finalizada con el que le sirvió para establecer la equivalencia entre calor y energía. Daremos una idea simplificada de dicho experimento:

Disponemos de un recipiente (fig. 16.1) con unas paletas fijas al interior de su pared, entre las cuales pueden girar otras montadas sobre un eje vertical solidario a un cilindro *C* sobre el que está arrollado un hilo de cuyo extremo libre pende un peso *P*. Se echa una

masa conocida de agua en el recipiente y se introduce en ella un termómetro T. Al descender P, hará girar las paletas móviles que agitarán el agua, la cual rozará con las paredes y las paletas fijas, calentándose. El calor Q absorbido por el agua podremos conocerlo multiplicando su masa por la elevación de temperatura y el trabajo

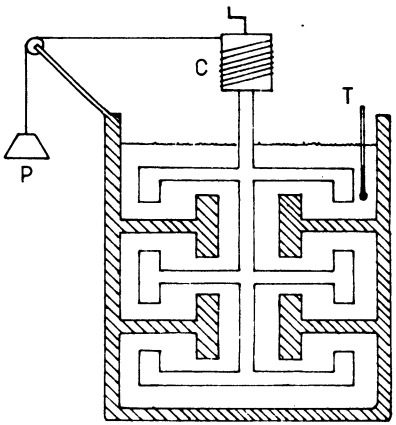


FIG. 16.1 Experimento de Joule.

efectuado por el peso P al caer será $W = P\,h$, siendo h la diferencia entre la altura inicial y la final. Cambiando el peso, la masa de agua, la diferencia de alturas y la temperatura inicial, podemos repetir varias veces el experimento obteniendo para el calor los valores Q', Q'', ... y para el trabajo, W', W'', ... Resulta siempre

$$\frac{W}{Q} = \frac{W'}{Q'} = \frac{W''}{Q''} = \ldots = J \qquad (16.2)$$

Es decir, que los trabajos entregados al agua son proporcionales a las cantidades de calor que se desprenden en ella. Esto indica que existe una equivalencia entre calor y trabajo; o sea, que *el calor es una forma de energía*. En la anterior descripción se ha supuesto que la cantidad de calor que absorben el recipiente y las paletas es despreciable frente a la que absorbe el agua, lo cual no está muy lejos de la verdad si la masa de agua empleada es suficientemente grande.

Si como unidad de trabajo empleamos el joule y como unidad de calor la caloría, el valor del *equivalente mecánico del calor* es $J = 4{,}18$ joule/caloría.

16.3 Calorímetro adiabático. El calorímetro adiabático es un instrumento utilizado para la medida de calores específicos de sólidos y líquidos que presenta la particularidad de reducir a un valor despreciable el calor que pueda salir de su interior o penetrar en él.

Consta (fig. 16.2) de un vaso metálico V de superficie exterior bruñida, a fin de que refleje, sin absorberla, toda radiación que la alcance. Dicho vaso está sustentado por tres pies puntiagudos, con lo que prácticamente se anulan las pérdidas de calor por conducción

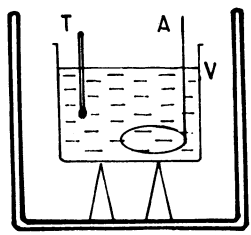


FIG. 16.2 Calorímetro adiabático.

(§ 16.14) a través de ellos. Rodea al vaso un recipiente cuyas paredes están recubiertas de fieltro y el conjunto tiene una tapa de corcho (no dibujada en la fig. 16.2) a través de la cual pasa el termómetro T y el mango del agitador A. En el interior del vaso se coloca una masa M conocida de agua y cuando todo el sistema ha alcanzado una temperatura uniforme t_0, se echa dentro el cuerpo problema, cuya masa m se conoce, así como su temperatura t_1, que podemos suponer mayor que t_0. Agitando continuamente (a fin de que en todos los puntos del líquido exista la misma temperatura) se observará que la indicación del termómetro T crece hasta alcanzar un valor estable t, lo cual indica que todos los cuerpos se encuentran ya a esta temperatura. Como podemos despreciar las pérdidas de calor, el cedido por el cuerpo

$$m\,c\,(t_1 - t)$$

ha de ser igual al absorbido por el sistema calorimétrico, es decir: al absorbido por el vaso

$$m_v\,c_v\,(t - t_0)$$

más el absorbido por el termómetro

$$m_t\,c_t\,(t - t_0)$$

más el absorbido por el agitador

$$m_a\, c_a\, (t - t_0)$$

más el absorbido por el agua

$$M\, (t - t_0)$$

es decir:

$$m\, c\, (t_1 - t) = (M + m_v\, c_v + m_t\, c_t + m_a\, c_a)\, (t - t_0)$$

que haciendo

$$A = m_v\, c_v + m_t\, c_t + m_a\, c_a$$

queda

$$m\, c\, (t_1 - t) = (M + A)\, (t - t_0) \qquad (16.3)$$

de donde puede despejarse el calor específico buscado c.

La cantidad A es el *valor en agua* del calorímetro, así llamado porque una masa A de agua líquida absorbería la misma cantidad de calor que el sistema calorimétrico. Su determinación es fácil: si el cuerpo problema que echamos es agua a la temperatura t_1, en la ecuación 16.3, $c = 1$ y la única incógnita sería A, que puede despejarse.

16.4 Cambios de estado. Las diferencias de comportamiento de los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos obedecen a tener estructuras moleculares diferentes. En principio, podríamos decir que las moléculas presentan grandes fuerzas de cohesión en los cuerpos sólidos, menores en los líquidos y nulas o casi nulas en los gases.

Lo que realmente caracteriza al estado sólido es su estructura cristalina, y cuerpos que, como el vidrio, no la presenten, no deben considerarse como sólidos, sino como líquidos de gran viscosidad, pues su comportamiento al calentarlos suficientemente es totalmente diferente del comportamiento de los cuerpos cristalinos. En la llamada *fusión vítrea,* el cuerpo se reblandece, adquiriendo un aspecto pastoso que se va fluidificando hasta alcanzar el aspecto típico de los líquidos.

Limitándonos a cuerpos puros, es decir, constituidos por una sola especie química de moléculas, aquéllos podrán pasar de un estado a otro alterando convenientemente su temperatura y la presión a que se hallen sometidos; y para cada cuerpo sometido a una presión determinada, cada cambio de estado tiene lugar a una temperatura bien definida característica del cuerpo, cuyo valor sería otro si cambiáramos el valor de la presión.

El paso del estado sólido al líquido recibe el nombre de *fusión,*

y si se pasara directamente del estado sólido al gaseoso, *sublimación.* Las transformaciones inversas reciben, respectivamente, los nombres de *solidificación* (o congelación) y *condensación.* También se llama condensación (o licuación) al paso del estado gaseoso al líquido, mientras que el inverso se llama *vaporización.*

Asimismo constituyen cambios de estado las transformaciones alotrópicas y el paso del estado líquido anisótropo al estado líquido isótropo, pero no vamos a ocuparnos de ellos en este libro.

16.5 Fusión y solidificación. Los átomos que constituyen un cristal se encuentran oscilando en torno a posiciones fijas y las amplitudes de sus oscilaciones aumentan cuando se eleva su temperatura. Ahora bien, la experiencia nos indica que al alcanzar la temperatura un valor determinado, el cuerpo se funde, es decir, pierde su estructura cristalina. Durante la fusión, la temperatura permanece constante a pesar de que sigamos suministrando calor al cuerpo, y ello nos sugiere que este calor se transforma en trabajo efectuado contra las fuerzas que mantenían a los átomos oscilando alrededor de sus posiciones fijas sin permitirles alejarse demasiado de ellas. De esta manera, se van arrancando los átomos del cristal y se deshace la estructura cristalina. Esto puede explicar el hecho experimental de que, una vez iniciada la fusión, masas iguales de una sustancia sólida requieran cantidades iguales de calor para pasar al estado líquido. La fusión, pues, cumple las siguientes leyes:

1.ª *A una presión dada, cada cuerpo funde a una temperatura fija cuyo valor es característico de la sustancia y que se llama temperatura de fusión.*

2.ª *Alcanzada la temperatura de fusión, cada gramo de sustancia requiere absorber para fundirse una cantidad de calor característica de la sustancia en cuestión y que se llama calor de fusión.*

En cambio, al ir enfriando un líquido a presión constante, es decir, si hacemos que dicho líquido vaya cediendo calor a otro cuerpo, su temperatura descenderá hasta un valor para el cual se inicia el paso del estado líquido al sólido. Este valor, al que se llama *temperatura de congelación,* se mantiene invariable durante el proceso de solidificación y cada gramo de sustancia *desprende,* al solidificarse, una cantidad de calor característica de la sustancia y que recibe el nombre de *calor de solidificación.* Pues bien, experimentalmente se observa que en una sustancia cualquiera las temperaturas de fusión y de congelación coinciden, así como los calores de fusión y de solidificación.

El hecho de que durante la fusión de un cuerpo se absorba una cantidad de calor igual a la que desprende dicha masa al congelarse, ya había sido observado por BLACK, quien, en vista de que aquel calor absorbido no elevaba la temperatura del cuerpo, consideró que se combinaba químicamente con las moléculas, quedando «latente» hasta que en la congelación se desprendía. Hoy nos damos cuenta de que lo que ocurre es que, en la fusión, las moléculas absorben una energía, de la cual se desprenden cuando vuelven a constituir la estructura cristalina en la congelación.

Por cierto que puede darse el caso de que se enfríe un líquido por debajo de su temperatura de congelación sin que se haya solidificado aún. Este fenómeno recibe el nombre de *subfusión* y constituye un estado de equilibrio metaestable, bastando una sacudida para que la temperatura suba al punto de congelación y el líquido se solidifique.

La presión tiene poca influencia sobre el fenómeno de la fusión y congelación. No obstante, si la presión a que se somete un sólido se hace muy grande, pueden lograrse variaciones apreciables de la temperatura de fusión. La cuchilla de un patín ejerce sobre el hielo una gran presión y gracias a ello se funde éste aun estando a una temperatura inferior a la de fusión a la presión atmosférica. La capa de agua que se forma bajo el patín favorece su deslizamiento, pero una vez ha pasado, la presión vuelve a ser la atmosférica y el agua vuelve a helarse (rehielo).

Este hecho es característico del agua por disminuir su densidad al helarse. Los cuerpos que son más densos en estado sólido que en estado líquido se ven afectados de manera contraria, o sea: el aumento de la presión lleva consigo una elevación de la temperatura de fusión.

Así pues, a cada presión corresponderá una temperatura de fusión a la cual estarán en equilibrio la fase líquida con la sólida. Si en estas condiciones de equilibrio suministramos calor, se fundirá parte del sólido; si extraemos calor, se congelará parte del líquido, pero no variarán ni la temperatura ni la presión. El conjunto de los estados de equilibrio sólido-líquido (o sea situaciones en las cuales las masas de sólido y líquido permanecen invariables) darían en el diagrama que tenga en abscisas temperaturas y en ordenadas presiones una curva casi vertical, pues ya hemos indicado que la temperatura de fusión se ve poco afectada por la presión.

Lo anterior se refiere a cuerpos puros, pero si el líquido contiene una sustancia disuelta, la temperatura de solidificación disminuye. El descenso del punto de congelación o descenso *crioscópico* es direc-

tamente proporcional al número de moles de la sustancia disuelta por unidad de volumen de la disolución.

16.6 Vaporización y condensación. Las moléculas en un líquido se mueven en todas direcciones y con todas las velocidades posibles. Algunas, en su movimiento, se dirigen hacia la superficie del líquido, pero al llegar a ella (§ 13.10) las fuerzas de cohesión se oponen a su salida del líquido y sólo las moléculas que tengan energía cinética superior al trabajo que hay que realizar contra las fuerzas atractivas para llegar a donde éstas sean despreciables, podrán escapar del líquido. Como las moléculas que escapan son las más energéticas, se comprende que ello origine una disminución de la energía total del líquido, lo que se traduce en un enfriamiento. Esta vaporización a través de la superficie libre del líquido recibe el nombre de *evaporación.*

Las moléculas escapadas quedarán sobre la superficie libre del líquido y contribuirán a la presión del gas exterior con una presión parcial a la que se da el nombre de *tensión de vapor.* Algunas moléculas escapadas vuelven al líquido, pero si de éste sale un número mayor el resultado será un incremento del número total de moléculas en la fase gaseosa, o sea en el vapor. Ello incrementará la tensión de vapor, la cual seguirá aumentando hasta que el número de moléculas que escapen sea igual al número de moléculas que vuelven en el mismo tiempo. Se ha establecido un *equilibrio* entre el líquido y su vapor. A éste se le da el nombre de *vapor saturante,* y a la tensión el de *tensión máxima de saturación.*

Si aumentamos ahora la temperatura del líquido, suministrándole calor, aumentará la energía de sus moléculas y será mayor el número de las que pueden escapar. Se rompe el equilibrio y la masa m de líquido que se evapora en un tiempo dado resulta ser

$$m = K \frac{p_m - p}{p_a} S$$

donde K es un coeficiente de proporcionalidad, p_m la tensión máxima de saturación a la temperatura del experimento, p la tensión del vapor en la atmósfera en que se experimenta, p_a la presión atmosférica y S el área de la superficie libre del líquido. Como puede verse, cuando $p = p_m$, $m = 0$. Luego para favorecer la evaporación conviene mantener p lo más diferente de p_m que sea posible. Así, cuando soplamos sobre la cuchara, barremos los vapores que sobre ella había, p se hace prácticamente nula y se incrementa la evaporación con el enfriamiento consiguiente, al cual hemos aludido antes.

Si queremos mantener la temperatura constante durante la evaporación, deberemos suministrar un calor y la cantidad de calor que *absorbe* cada gramo de líquido al evaporarse en estas condiciones, recibe el nombre de *calor de vaporización* del líquido considerado. Es igual al calor que *desprende,* al condensarse, un gramo de su vapor.

Puede comprobarse experimentalmente que el equilibrio entre un líquido y su vapor depende *exclusivamente* de la temperatura y de la tensión de vapor y no de las masas de líquido y vapor coexis-

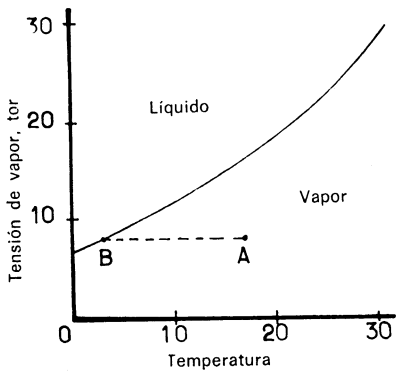


FIG. 16.3 Estados de equilibrio líquido-vapor.

tentes. Así pues, llevando a una gráfica (fig. 16.3) la temperatura en abscisas y la tensión máxima de saturación correspondiente en ordenadas, se obtiene una curva cuyos puntos representarán los distintos estados de equilibrio posibles entre el líquido y su vapor. A cada líquido corresponderá una curva que es característica del mismo.

16.7 Ebullición. Los líquidos suelen tener aire disuelto en forma de burbujas invisibles por su pequeñez. En estas burbujas, el vapor es saturante por estar en presencia del líquido. Si su tensión es inferior a la presión que se ejerce exteriormente sobre la burbuja, el volumen de ésta será muy pequeño. Pero si elevamos la temperatura, llegará un momento en que la tensión saturante en la burbuja será igual a la presión exterior y a partir de entonces la tensión interior superará a la presión exterior y la burbuja se hinchará, ascenderá a la superficie y reventará en ella liberando el vapor que contenía. Esto ocurre casi simultáneamente en muchas burbujas y el fenómeno recibe el nombre de *ebullición.* A cada temperatura se producirá la ebullición para una presión exterior determinada (la

que sea igual a la tensión máxima de saturación correspondiente) y así, en el caso del agua, ésta hierve a 100°C si la presión exterior es de 760 tor. Si fuera más baja la presión, herviría a una temperatura inferior a 100°C, y si fuera superior la presión, como ocurre en las calderas y ollas a presión, la temperatura de ebullición es más elevada.

Si un líquido tiene disuelta una sustancia, la temperatura de ebullición es mayor que la del líquido puro a la misma presión. Este llamado *ascenso ebulloscópico* resulta ser directamente proporcional al número de moles de la sustancia disuelta.

16.8 Propiedades de los vapores saturados y no saturados. Cuando un vapor contenido en un recinto tiene una tensión inferior a la máxima de saturación, se dice que es un vapor no saturado. Los vapores no saturados se comportan aproximadamente como gases y por tanto cumplen sus leyes, tanto mejor cuanto más lejos estén de la saturación. Si queremos determinar la masa de un tal vapor del cual conocemos su presión parcial (tensión) en una mezcla de gases, en un recinto de volumen V, aplicaremos la fórmula

$$p\,V = \frac{m}{M} R\,T$$

y vemos que permaneciendo constante la temperatura, la tensión p es proporcional a la masa del vapor.

Si tenemos una cantidad de líquido en un recinto cerrado, el vapor en equilibrio con él será saturante. Si intentamos aumentar la presión en el recinto por disminución del volumen de éste y no alteramos la temperatura, como el equilibrio sólo depende de la temperatura y la tensión de saturación (cfr. § 16.6) y aquélla no varía, tampoco variará ésta, lo que obliga a que se condense parte del vapor. Como una variación de volumen no entraña variación de la presión parcial del vapor en la mezcla de gases, se desprende que los vapores saturantes no cumplen la ley de Boyle.

Puede darse el caso de que el vapor esté sometido a una presión superior a su tensión máxima de saturación sin que se condense. Se dice entonces que el vapor está *sobresaturado*. Este fenómeno suele presentarse en el vapor de agua atmosférico cuando no existen *núcleos de condensación*, es decir, pequeñas partículas de polvo, humo, iones, etc., sobre las cuales se condensa el vapor.

Si el recinto ocupado por el vapor saturante (fig. 16.4) tiene una zona a temperatura T_2 inferior al resto, en esta zona se condensará

líquido, pues la tensión máxima de saturación es inferior a la del vapor saturante en el recinto. Al condensarse vapor disminuye ésta y se vaporiza líquido en la parte a temperatura mayor T_1 hasta que la tensión sea la máxima a aquella temperatura. En la zona más fría se condensa líquido de nuevo y así sucesivamente. Esto hace que el líquido que estaba en la zona más caliente vaya pasando a la zona

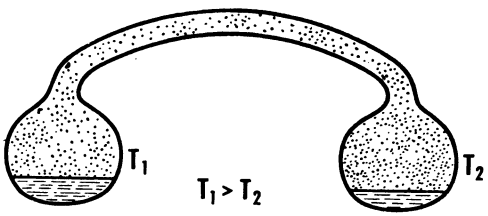


FIG. 16.4 Destilación.

de menor temperatura; es decir, tiene lugar una *destilación*. El fenómeno descrito recibe el nombre de *principio de Watt o de la pared fría*. La destilación puede utilizarse, pues, para separar dos líquidos de puntos de ebullición diferentes. El líquido más volátil es el que tiene mayor tensión máxima y es el que destila primero.

Para condensar un vapor se puede hacer por compresión o por enfriamiento. Al comprimir un vapor, aumentamos su tensión hasta convertirlo en saturante. Si continuamos la compresión, la tensión se mantendrá constante e igual a la máxima de saturación a la temperatura del experimento (la cual mantendremos invariable) y el vapor se va condensando.

Si enfriamos un vapor, la temperatura disminuye (tramo AB en la figura 16.3) y el vapor pasa a ser saturante. Continuando el enfriamiento, el vapor se va condensando. Simultaneando la compresión y el enfriamiento lograríamos una condensación más rápida.

16.9 Humedad. Como resultado de la evaporación parcial del agua existente en la superficie terrestre, la atmósfera contiene cierta cantidad de vapor de agua. La masa de vapor contenida en un volumen determinado de aire varía de un lugar a otro en las capas bajas de la atmósfera. En las altas va disminuyendo a causa de la condensación por enfriamiento. El vapor se condensa sobre *núcleos de condensación* para formar las nubes.

Se llama *humedad absoluta* a la masa de vapor contenida en un volumen determinado de aire. Se acostumbra a medir en g/m^3. Vea-

mos de relacionarla con la tensión de vapor. Si, como sucede frecuentemente, el vapor no es saturante, podremos aplicar (cfr. § 16.8)

$$p\,V = \frac{m}{M} R\,T$$

siendo $M = 18$ para el agua. Luego

$$\frac{m}{V} = \frac{p\,M}{R\,T} = \frac{p}{T}\,\frac{18}{8{,}3 \times 10^7}$$

donde V debe expresarse en cm^3. Si la quisiéramos poner en m^3, deberíamos escribir

$$\frac{m}{10^6\,V} = \frac{p}{T}\,\frac{18}{8{,}3 \cdot 10^7} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{m}{V} = \frac{p}{T}\,\frac{18}{83}$$

y expresando p en tor

$$\frac{m}{V} = \frac{1333\,p}{T}\,\frac{18}{83}$$

Si tomamos como temperatura ambiente $t = 18°C$, será $T = 291°K$ y

$$\frac{m}{V} = \frac{1333 \times 18}{291 \times 83}\,p = p$$

o sea que a la temperatura ambiente la humedad absoluta, expresada en g/m^3, es igual aproximadamente a la tensión de vapor expresada en tor.

Se llama *humedad relativa* o *estado hidrométrico* a la relación entre la masa de vapor de un volumen dado de aire (humedad absoluta) y la masa de vapor contenida en el mismo volumen si estuviese saturado a la misma temperatura.

De lo dicho anteriormente se desprende que la relación entre las masas es la misma que entre la tensión del vapor y la de saturación a la misma temperatura. Generalmente, la atmósfera no está saturada, por tanto la humedad relativa es inferior a la unidad. Si hubiese saturación la humedad relativa sería la unidad. Se acostumbra a dar esta humedad relativa en tanto por ciento. Para ello multiplicaremos por cien la relación anterior. Por ejemplo, si la tensión del vapor existente es 10 tor a 20°C, siendo la tensión de saturación a 20°C igual a 17,54 tor, la humedad relativa vale:

$$e = \frac{10}{17{,}54} = 0{,}57 \qquad \text{es decir, el 57 \%}$$

A continuación damos una tabla con las tensiones de saturación del vapor de agua a distintas temperaturas y la masa de vapor contenida en 1 m³ de aire para cada tensión de vapor:

TABLA 16.2. TENSIONES MÁXIMAS DE SATURACIÓN DEL VAPOR DE AGUA

t°C	p (tor)	m (g/m³)	t°C	p (tor)	m (g/m³)
0	4,58	4,84	20	17,54	17,3
2	5,29	5,6	22	19,83	19,4
4	6,10	6,4	24	22,38	21,8
6	7,01	7,3	26	25,22	24,4
8	8,05	8,2	28	28,36	27,2
10	9,21	9,4	30	31,83	30,3
12	10,52	10,7	32	35,67	33,8
14	11,99	12,1	34	39,91	37,5
16	13,64	13,6	36	44,58	41,7
18	15,48	15,4	38	49,71	46,2
			40	55,3	51,0

Observemos que de 16°C a 18°C, p coincide con m; si $t < 10$°C, $p < m$; si $t > 18$°C, $p > m$.

A continuación vamos a resolver un problema usando la tabla anterior. La humedad relativa de una masa de aire encerrada en un recipiente de 1 m³ es 40 % a 20°C. ¿Cuál será su humedad relativa a 16°C? ¿A qué temperatura la humedad será del 100 % (punto de rocío)? ¿Qué cantidad de agua se habrá condensado, si la temperatura desciende a 2°C?

A 20°C: $p_s = 17{,}54$ tor; $p = 0{,}4 \cdot 17{,}54 = 7{,}016$, que corresponde a 6,92 g/m³;

A 16°C: $p_s = 13{,}64$ tor, que corresponde a 13,6 g/m³;

la humedad relativa será: $\frac{6{,}92}{13{,}6} = 0{,}51$, o sea 51 %

A 6°C vemos que $p_s = 7{,}01$ tor; luego a temperatura igual o menor que 6°C, la humedad será de 100 %. El punto de rocío es 6°C.

A 2°C: $p_s = 5{,}29$, que corresponde a 5,6 g/m³.

La masa de agua condensada es $6{,}9 - 5{,}6 = 1{,}3$ gramos.

Si no disponemos de las tablas de masa de vapor en 1 m^3, en función de la tensión, podíamos haber considerado las tensiones en lugar de las masas. El error cometido es pequeño (7,016 — 5,290 = = 1,726 gramos).

Supongamos que el vapor de agua atmosférico se halle en las condiciones representadas por el punto *A* de la figura 16.3. Si se enfría la atmósfera, cuando la temperatura alcance el valor correspondiente al punto *B*, el vapor será ya saturante, y si prosigue el enfriamiento se condensará formando pequeñas gotas. Esto explica el fenómeno del *rocío*, el cual se debe a que los cuerpos de la superficie terrestre se enfrían más de prisa que la atmósfera. Se llama *punto de rocío* a la temperatura para la cual el vapor de agua existente en la atmósfera es saturante. Cuando, en invierno, una persona con gafas penetra en un bar, los cristales de aquéllas se le empañan. Esto se debe a que dichos cristales se hallan a una temperatura inferior al punto de rocío del ambiente húmedo del interior. Éste está a una temperatura superior al punto de rocío y por ello no se produce condensación en los cuerpos, más cálidos que las gafas, contenidos en la sala.

En esto se basan los *higrómetros* de Daniell, Regnault y Alluard, en los que se enfría un recipiente metálico, gracias a la evaporación rápida de un líquido muy volátil (por ejemplo, éter), empañándose dicho recipiente al llegar al punto de rocío a causa de la condensación del vapor de agua contenido en el aire ambiente. Con un termómetro sumergido en el líquido que se vaporiza determinamos el punto de rocío y con unas tablas (puede servir la anterior) se determinan las tensiones máximas correspondientes al punto de rocío y a la temperatura ambiente. El cociente entre estas dos tensiones nos da la humedad relativa.

16.10 Sublimación. Algunos sólidos, a la presión normal y a la temperatura ambiente, emiten vapores en cantidades apreciables. Elevando la temperatura, podemos lograr que pasen del estado sólido a vapor sin fundirse. Como ejemplo de sólidos que se subliman tenemos: la naftalina, el alcanfor, el yodo, el arsénico. Puede observarse este fenómeno en el hielo a baja presión.

La sublimación depende de la presión. Se favorece la sublimación disminuyendo la presión (cfr. § 16.11).

Cuando un sólido se sublima, el *calor de sublimación* es igual a la cantidad de calor que ha de absorber cada unidad de masa para pasar de sólido a vapor a cierta presión y temperatura. Su valor es igual a la suma del calor de fusión más el de vaporización de la sustancia

sublimada. Al pasar directamente de vapor a sólido desprende la misma cantidad de calor.

16.11 Punto triple. A cada cuerpo puro corresponderá una curva de equilibrio entre las fases sólida y de vapor *PS* (fig. 16.5) que nos dará la temperatura de sublimación en función de la presión. También corresponde, según hemos visto antes, una curva *PF* correspondiente a los estados de equilibrio entre las fases sólida y líquida. El punto *P*, por pertenecer a *PF*, representa un par de valores presión-temperatura en el cual están en equilibrio las fases sólida y líquida,

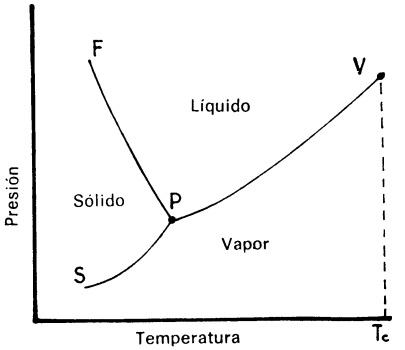


FIG. 16.5 Punto triple.

y por pertenecer a *PS* existe equilibrio entre las fases sólida y gaseosa, luego si las tres fases están en equilibrio pertenecerá a la curva *PV* representativa de los estados de equilibrio entre un líquido y su vapor. Las tres curvas se cortan en *P* y por ello se da a éste el nombre de *punto triple*. En él pueden coexistir las tres fases sólido-*líquido*-vapor.

Por encima del punto triple, al aumentar la temperatura se puede pasar de sólido a líquido y de líquido a vapor. Por debajo del punto triple, por aumento de la temperatura pasamos de sólido a vapor.

La temperatura del punto triple del agua se toma actualmente como cero de la escala centígrada (cfr. § 16.1), con lo cual la temperatura de fusión del hielo a la presión de 1 atmósfera resulta ser 0,01° C. Podemos darnos cuenta de que la diferencia entre el cero actual y el antiguo será despreciable en la mayoría de los casos.

16.12 Licuación de gases. Experimentalmente se comprueba que comprimiendo un gas cuya temperatura es inferior a cierto valor, pasa al estado líquido. Para estudiar este fenómeno, encerremos un

gas en un cuerpo de bomba en contacto con un baño que mantenga constante su temperatura y midamos las presiones a que está sometido el gas al variar el volumen que ocupa. Llevando estos valores a un diagrama que tenga las presiones en ordenadas y los volúmenes en abscisas, tendremos una curva llamada isoterma por corresponder a estados de igual temperatura. Tomando otro baño de temperatura

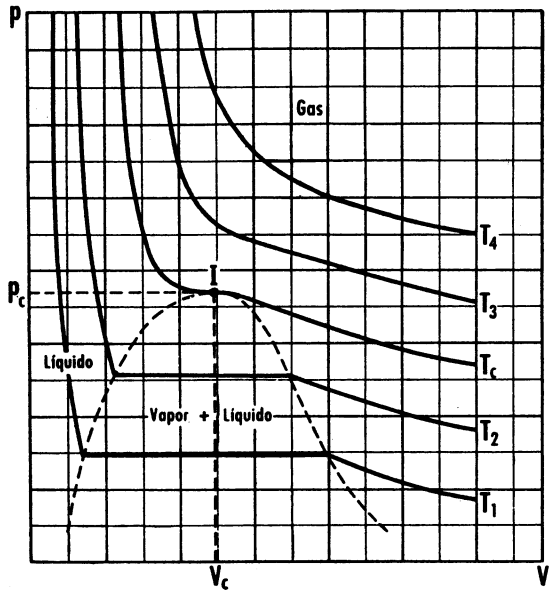


FIG. 16.6 Isotermas de un gas real.

distinta, podremos trazar otra isoterma, etc. De esta manera obtendríamos la familia de isotermas representada en la figura 16.6. Dichas isotermas observamos que son de dos tipos: unas, correspondientes a temperaturas relativamente bajas (T_1, T_2), presentan puntos angulosos; otras, correspondientes a temperaturas más elevadas, no los presentan, y si la temperatura es suficientemente elevada (T_4 en la fig. 16.6) puede considerarse que el gas cumple la ley de Boyle-Mariotte.

Mantengamos constante una temperatura baja T_1 y veremos que al hacer disminuir el volumen aumenta la presión hasta llegar a un valor en el cual, aunque disminuyamos el volumen, la presión se mantiene constante (tramo horizontal). En el cuerpo de bomba se forman gotas de líquido debido a la licuación del gas, el vapor se

convierte en saturante y su presión se mantiene constante e igual a la tensión máxima de saturación. Al seguir reduciendo el volumen aumenta la cantidad de líquido hasta que se haya licuado todo el gas. Entonces, a causa de la baja compresibilidad de los líquidos, para reducir poco el volumen es necesario elevar mucho la presión y la isoterma sube casi verticalmente. Repitiendo el experimento con otra temperatura T_2 algo más elevada obtendríamos una isoterma parecida a la anterior. Difiere en que para pasar al estado líquido hace falta mayor presión y en que la disminución de volumen que tiene lugar a presión constante es menor que antes.

Las isotermas con puntos angulosos y las carentes de éstos están separadas por una isoterma, llamada *crítica,* en la cual el tramo horizontal se ha reducido a un punto de inflexión I de coordenadas V_c, p_c al que se da el nombre de *punto crítico.* La temperatura T_c correspondiente a esta isoterma recibe el nombre de *temperatura crítica* y la licuación tiene lugar bruscamente, sin disminución de volumen, cuando se alcanzan las condiciones del punto crítico. Para temperaturas superiores a T_c no se produce licuación y el gas tiende a comportarse como perfecto, tanto más cuanto más elevada sea su temperatura. Las coordenadas del punto crítico llevan los nombres de *volumen crítico* y *presión crítica.*

Examinando la figura 16.6 sacamos la conclusión de que *si la temperatura es superior a la crítica, el gas no puede licuarse por simple compresión,* o sea que para conseguir su licuación será necesario enfriarlo previamente por bajo de su temperatura crítica y luego comprimirlo. Inversamente, si la presión es inferior a la crítica, podremos licuarlo por enfriamiento.

De todo lo anterior se desprende que la curva PV de la figura 16.5 termina en el punto V, que será el correspondiente al punto crítico, pues a temperaturas más altas no podrá coexistir el líquido con su vapor.

ANDREWS propuso llamar *gases* a los cuerpos que se encuentran a una temperatura superior a su temperatura crítica y *vapores* a los que se encuentran a temperatura inferior a la citada.

16.13 Propagación del calor. Colocando en contacto dos cuerpos cuyas temperaturas sean diferentes, se observa paso de calor desde el cuerpo a mayor temperatura al cuerpo de temperatura más baja. Calentando una porción de un cuerpo, podremos comprobar que al cabo de un tiempo la temperatura del resto del cuerpo ha aumentado. El calor se ha propagado a través de la materia, estando en reposo dichos cuerpos. En los casos citados se dice que el calor se ha pro-

pagado por *conducción* y no ha habido desplazamiento de materia.

Si calentamos la parte inferior de un fluido, comprobaremos que la temperatura en los puntos de su parte superior va aumentando. Pero ahora, al contrario que en los casos anteriores, el fluido no está en reposo estableciéndose una corriente ascendente y otra descendente a causa de las variaciones de densidad con la temperatura. En este caso se dice que el calor se propaga por *convección* y este tipo de propagación se realiza por transporte material.

Dos cuerpos a temperaturas diferentes, separados y en el vacío, también llegan a igualar sus temperaturas sin que pueda hablarse de conducción ni de convección por no tener interpuesto ningún medio material. Se dice que en este caso el calor se propaga por *radiación* y el estudio de este fenómeno lo realizaremos más adelante al estudiar la radiación de energía.

El primero que estudió cuantitativamente la propagación del calor por conducción fue FOURIER (1822) en su «Théorie analytique de la chaleur». Es interesante señalar que, a pesar de partir de las ideas propias de su tiempo, en las que se consideraba el calor como un fluido, las conclusiones a que llegó son aceptadas en la actualidad.

16.14 Conducción del calor a través de una pared plana sin pérdidas laterales. Consideremos una placa en cuyas caras extremas tenemos las temperaturas T_1 y T_2 constantes (fig. 16.7). Si $T_1 > T_2$, hay paso de energía calorífica de la cara 1 a la 2. Supongamos que no haya pérdidas laterales de calor, o sea que las paredes laterales están aisladas térmicamente. En este caso, si T_1 y T_2 se mantienen estacionarias, la cantidad de calor que entra por una cara es igual a la que sale por la otra, las temperaturas en los distintos puntos serán estacionarias y dependerán de la distancia a una de las caras. Si el calor se propaga normalmente a éstas y no hay pérdidas laterales, es evidente que la temperatura en los distintos puntos de un plano paralelo a las caras debe ser la misma (nos limitamos a medios homogéneos e isótropos).

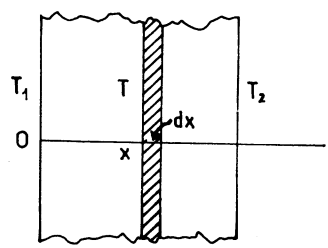


FIG. 16.7 Problema del muro.

Tomemos como eje Ox la dirección normal a las caras y el origen O en la primera. Consideremos dos planos paralelos a las caras, uno de abscisa x y el otro de abscisa $x + dx$ y sea, en régimen estacionario, T la temperatura en los puntos del plano de abscisa x y $T + dT$ la temperatura en los puntos del otro plano. Experimentalmente se demuestra que la cantidad de calor dQ que atraviesa el espacio entre los planos en un intervalo de tiempo dt es directamente proporcional al área S de la sección recta de la placa y al gradiente de temperatura entre los planos, entendiendo por gradiente de temperatura el incremento de temperatura por unidad de espesor, es decir, dT/dx. Podemos escribir, pues,

$$\frac{dQ}{dt} = -KS\frac{dT}{dx} \tag{16.4}$$

A la constante de proporcionalidad K se le llama *coeficiente de conductibilidad térmica* y representa la cantidad de calor que atraviesa, en la unidad de tiempo, una lámina de sección y espesor unidad cuando entre las caras existe una diferencia de temperatura de un grado. Su valor depende del sistema de unidades empleadas para la medida de aquellas magnitudes físicas; generalmente se da en kcal/s · m · K. El signo menos indica que el sentido de propagación es el contrario al gradiente, o sea que va de la temperatura superior a la inferior, y este sentido es el de un gradiente negativo.

Los valores de K varían mucho de una sustancia a otra (ver tabla 16 · 3). En los metales, que son los sólidos de mayor conductividad, los valores de K son del orden de 10^{-2} kcal/s · m · K, destacando la plata con el valor 0,1. Entre los sólidos menos conductores se encuentran el corcho ($K = 4 \cdot 10^{-5}$) y la madera ($K = 2 \cdot 10^{-5} - 8 \cdot 10^{-5}$). Los gases son muy malos conductores del calor (K = del orden de 10^{-6}) y en ellos la propagación tiene lugar, prácticamente, por convección.

Determinemos la distribución de temperaturas en la placa citada: al no haber pérdidas laterales, en régimen estacionario la cantidad dQ/dt debe mantenerse constante, y llamando

$$H = \frac{1}{KS}\frac{dQ}{dt} \tag{16.5}$$

la ecuación 16.4 se puede escribir en la forma $H = -dT/dx$ y siendo H constante podemos integrar obteniendo

$$Hx = -T + C$$

Para hallar la constante de integración recordemos que para $x = 0$, $T = T_1$, con lo cual $C = T_1$ y tendremos

$$T = T_1 - H x$$

En esta expresión podemos determinar el valor de H considerando que para $x = h$ (siendo h el espesor de la placa), $T = T_2$ y por tanto

$$H = \frac{T_1 - T_2}{h}$$

de donde la temperatura a una distancia x de la primera cara será

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{h} x$$

y podemos decir que la temperatura disminuye linealmente con la distancia a la cara anterior. Así pues, si representamos gráficamente T en función de x encontramos una recta de ordenada en el origen igual a T_1 y pendiente $-H$. Sustituyendo el valor de H en la ecuación 16.5 escribimos:

$$\frac{dQ}{dt} = K S \frac{T_1 - T_2}{h} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{K}\frac{h}{S}} \tag{16.6}$$

Expresión que podemos comparar formalmente con la ley de Ohm de la Electrocinética $I = V/R$ identificando dQ/dt con la intensidad I de la corriente, $T_1 - T_2$ con la ddp V y el denominador

$$\frac{1}{K}\frac{h}{S} = R_T \tag{16.7}$$

con la resistencia, e incluso le daremos el nombre de *resistencia térmica,* y por analogía con la eléctrica

$$R = \rho \frac{h}{S}$$

al recíproco de la conductibilidad térmica puede llamársele *resistividad térmica.* O sea:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \tag{16.8}$$

En una barra que tenga pérdidas laterales de calor, la variación de temperatura a lo largo de la misma es distinta de la que se tiene en el caso anterior. La disminución de temperatura es mayor. Se demuestra que la ley de variación es exponencial, adoptando la forma (para una barra larga)

$$T = T_1 e^{-bx}$$

donde b es un coeficiente que depende del perímetro de la barra y de la sustancia que la compone. Este coeficiente puede determinarse experimentalmente midiendo la temperatura en distintos puntos a lo largo de la barra.

16.15 Determinación experimental de la conductibilidad (método de Searle). Tomemos una muestra de la sustancia en estudio a la que daremos forma de varilla y aislemos térmicamente la superficie lateral (fig. 16.8). Suministremos energía calorífica en uno de los extremos (por ejemplo, mediante una

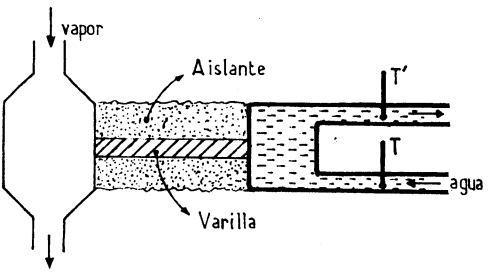


FIG. 16.8 Método de Searle.

resistencia eléctrica por la que circula una corriente, o mediante una corriente de vapor). La cantidad de calor que llega al otro extremo puede determinarse estableciendo una circulación de agua o aceite por él y midiendo las temperaturas inicial y final en cierto intervalo de tiempo. Conocido el caudal puede hallarse la cantidad de calor que llega por unidad de tiempo, y dadas la sección y longitud de la varilla, podremos hallar K aplicando la ecuación 16.4.

Si se trata de un mal conductor del calor, se da a la muestra forma de disco delgado y de gran superficie, colocándolo entre discos de cobre y operando de manera parecida a la anterior.

16.16 Conducción del calor a través de una pared compuesta de láminas de distintos materiales. Consideremos una pared compuesta de tres láminas paralelas constituidas por materiales de distinta conductibilidad térmica (figura 16.9). Los cuerpos los designaremos por 1, 2 y 3. Sus conductibilidades térmicas por K_1, K_2 y K_3, los espesores por h_1, h_2 y h_3 y llamemos S a la superficie a través de la cual se propaga el calor.

Sea T_0 la temperatura a la entrada de la primera cara del cuerpo 1, T_1 a su salida, T_2 a la salida del cuerpo 2 y T_3 a la salida del cuerpo 3. Las resistencias térmicas (ec. 16.7) correspondientes a los cuerpos 1, 2 y 3 serán R_1, R_2 y R_3, respectivamente. Aplicando la ecuación 16.8 a los cuerpos 1, 2 y 3 podemos escribir

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} \qquad (16.9)$$

ya que en régimen estacionario dQ/dt debe ser el mismo para los tres cuerpos. Despejando las diferencias de temperaturas tenemos

$$T_0 - T_1 = R_1 \frac{dQ}{dt}$$

$$T_1 - T_2 = R_2 \frac{dQ}{dt}$$

$$T_2 - T_3 = R_3 \frac{dQ}{dt}$$

y sumando

$$T_0 - T_3 = (R_1 + R_2 + R_3) \frac{dQ}{dt}$$

o sea

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_0 - T_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_0 - T_3}{R} \tag{16.10}$$

siendo $R = R_1 + R_2 + R_3$ y representa la resistencia térmica del conjunto. Nótese que esto tiene gran analogía con la resistencia equivalente de varios conductores en serie, en corriente continua, pues la resistencia total es la suma de las resistencias de cada uno de los conductores.

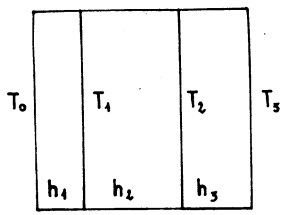


FIG. 16.9

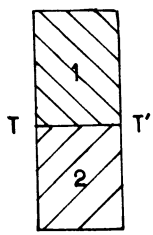


FIG. 16.10

Supongamos ahora dos láminas 1 y 2 colocadas una a continuación de otra como se indica en la figura 16.10. Aplicando a cada una la ecuación 16.8

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{T - T'}{R_1} \qquad \frac{dQ_2}{dt} = \frac{T - T'}{R_2}$$

y la dQ/dt total será la suma de estas dos, o sea

$$\frac{dQ}{dt} = (T - T') \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{T - T'}{R}$$

donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{16.11}$$

que nos recuerda la asociación en paralelo de resistencias eléctricas.

16.17 Conducción de calor a través de las paredes de un tubo cilíndrico. Consideremos un tubo cuya sección recta sea una corona circular de radios r_1 y r_2 y cuya altura sea h (fig. 16.11). La conductibilidad térmica es K, y en todos los puntos de la pared interna la temperatura tiene el valcr constante T_1

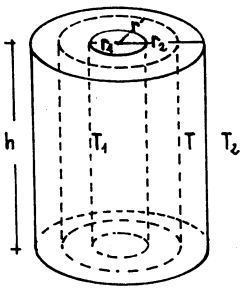


FIG. 16.11

y en la externa T_2. En régimen estacionario, la cantidad de calor conducida a través de las paredes por unidad de tiempo puede escribirse, considerando una superficie interior de radio r (cfr. ec. 16.4),

$$\frac{dQ}{dt} = -K\,2\pi r h \frac{dT}{dr} \qquad \text{(ya que } S = 2\pi r h\text{)}$$

Hagamos

$$H = \frac{1}{2\pi h K}\frac{dQ}{dt}$$

y podremos escribir

$$H = -r\frac{dT}{dr}$$

Siendo H constante, podemos integrar

$$H\frac{dr}{r} = -dT$$

obteniendo

$$H \ln r = -T + \text{const.} \qquad (16.12)$$

Para $r = r_1$, $T = T_1$ y $H \ln r_1 = -T_1 + \text{const.}$, que restada de la ecuación 16.12 nos da

$$T = T_1 - H \ln \frac{r}{r_1} \qquad \text{de donde} \qquad T_2 = T_1 - H \ln \frac{r_2}{r_1}$$

y por tanto

$$H = \frac{T_1 - T_2}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$$

Luego

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \tag{16.13}$$

y además

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi h K \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{16.14}$$

Si consideramos que el tubo está constituido por distintas capas cilíndricas 1, 2 y 3, de radios r_0, r_1, r_2 y r_3, con conductibilidades K_1, K_2 y K_3, aplicando la ecuación 16.14 al cuerpo 1

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi h K_1 \frac{T_0 - T_1}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$$

y en régimen estacionario debe cumplirse

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi h K_2 \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi h K_3 \frac{T_2 - T_3}{\ln \frac{r_3}{r_2}}$$

haciendo

$$R_1 = \frac{1}{2\pi h K_1} \ln \frac{r_1}{r_0}$$

$$R_2 = \frac{1}{2\pi h K_2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$R_3 = \frac{1}{2\pi h K_3} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

resulta

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3}$$

que es análoga a la ecuación 16.9. Operando como allí, obtenemos

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{T_0 - T_3}{R} \qquad \text{siendo} \qquad R = R_1 + R_2 + R_3$$

o sea

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi h (T_0 - T_3)}{\frac{1}{K_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{K_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{K_3} \ln \frac{r_3}{r_2}}$$

16.18 Ley de Wiedemann-Franz. El hecho de que en los metales la conductibilidad térmica y la conductibilidad eléctrica sean mayores que en los restantes cuerpos parece indicar que estas dos magnitudes guarden cierta relación. Antes hemos aludido a una analogía formal. WIEDEMANN y FRANZ in-

vestigaron la relación entre ambas y hallaron que su cociente, medidas a la misma temperatura, es constante. LORENTZ indicó que el cociente entre la conductibilidad térmica y la eléctrica debía ser proporcional a la temperatura absoluta. Más adelante, SOMMERFELD, por consideraciones teóricas, llegó a la conclusión de que el cociente entre la conductibilidad térmica y el producto de la conductibilidad eléctrica por la temperatura absoluta era igual a la constante $2{,}45 \times 10^{-8}$ (Volt/K)^2.

16.19 Ejemplos de conducción de la energía calorífica. Cuando tocamos un cuerpo a temperatura inferior a nuestro cuerpo la sensación obtenida depende, no solamente de su temperatura, sino también de su conductibilidad térmica. Consideremos un trozo de madera y un objeto metálico, ambos a la temperatura ambiente, por lo general inferior a la del cuerpo humano. El metal nos parecerá más frío que la madera. En el caso de la madera, mal conductor del calor, el calor que le cede la mano queda localizado en la pequeña región puesta en contacto con ella y su temperatura se eleva tendiendo a igualarse con la de la mano, mientras que en el metal el calor se propaga por el cuerpo y por tanto notamos sensación de frío. Para evitarla podemos intercalar entre el objeto metálico y la mano un mal conductor (por ejemplo, la mano enguantada). Por eso, tanto para evitar la sensación de frío como para evitar el contacto con cuerpos a temperatura elevada se emplean los materiales malos conductores del calor en forma de mangos aislantes, capas de amianto, etc. También se emplean para impedir la entrada de calor en recintos que contengan hielo, los cuales suelen tener las paredes de corcho, o para impedir que salga de una vasija que contenga un líquido que quiera mantenerse caliente.

16.20 Convección. Ya hemos indicado anteriormente que el calor se propaga por convección en los fluidos por la variación de densidad que provoca al aumentar la temperatura y establecerse en el fluido una corriente ascendente y otra descendente. El calor se propaga a causa del movimiento del fluido. Éste es el caso de la *convección natural*. Si obligamos al fluido a moverse para activar la propagación del calor con un dispositivo determinado (ventilador, bomba, etc.), se dice que la convección es *forzada*. El estudio de la convección debe hacerse aplicando las leyes de la Dinámica de fluidos, pero su estudio analítico no puede realizarse mediante consideraciones elementales. Las dificultades provienen de la gran cantidad de parámetros variables que intervienen en este fenómeno, pues la cantidad de calor a través de una superficie en contacto con un fluido que se propaga por convección depende de la forma y posición del fluido, de su naturaleza y constantes térmicas, así como de la velocidad del fluido, ya que es importante conocer si actúa en régimen laminar o turbulento. Para cálculos prácticos se ha propuesto la fórmula

$$\frac{dQ}{dt} = K_c S (T' - T)$$

pero en esta fórmula K_c no es una constante propia del fluido, sino que, por lo general, depende de una serie de circunstancias que exigen un ensayo sobre modelo que facilite el cálculo gráfico por medio de ábacos. En algunos casos muy simples, sus valores están tabulados.

La propagación del calor por convección tiene muchas aplicaciones técnicas tales como la mayoría de tipos de calefacción doméstica, el tiro de una chimenea, etc. En la Naturaleza nos aparece este fenómeno en los movimientos de las masas atmosféricas y en las corrientes marinas. Consideremos un lago en invierno. Si la temperatura del aire en contacto con la superficie desciende, la disminución de temperatura del agua superficial hace que aumente su densidad y descienda hacia el fondo, siendo sustituida por agua situada debajo, la cual, a su vez, se enfría y desciende. Llegará un momento en que la densidad del agua del fondo será máxima, lo cual ocurre a 4°C, y cesa la convección, con lo que la ulterior congelación de la superficie no afectará a la temperatura del agua del fondo, que continuará siendo de 4°C.

TABLA 16.3
CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS

Sustancia	Conductividad	
	kcal/m.s.° C	J/m.s.K.
Cobre	$9{,}2.10^{-2}$	385,11
Aluminio	$4{,}9.10^{-2}$	205,11
Acero	$1{,}1.10^{-2}$	46,05
Hielo	$4{,}0.10^{-4}$	1,674
Hormigón	$2{,}0.10^{-4}$	0,837
Vidrio	$2{,}0.10^{-4}$	0,837
Madera	$2{,}0.10^{-5}$	0,0837

17

Termodinámica

En el capítulo anterior se ha visto que el calor es una forma de energía. Por tanto, podrá ocurrir que al suministrar calor a cierto dispositivo, éste lo transforme en trabajo, ya que es posible transformar en trabajo la energía, según vimos en Mecánica. Inversamente, cuando entregamos trabajo a un dispositivo que contenga partes en movimiento relativo y que rocen, en los rozamientos se observa desprendimiento de calor. En este caso se ha transformado trabajo en calor. La Termodinámica es la parte de la Física que se ocupa de las relaciones entre calor y trabajo y permite explicar multitud de fenómenos que la Mecánica no interpretaba a causa de intervenir esa forma de energía, llamada calor, ignorada por aquélla.

17.1 Estado de un sistema. Llamaremos *sistema* en Termodinámica a la porción de materia que se quiere estudiar. Dicha porción de materia no tiene por qué tener masa constante y la podemos definir diciendo que es la materia contenida en el interior de una superficie cerrada, superficie que tampoco tiene por qué ser material. Por ejemplo, el combustible contenido en el interior de un cohete constituye un sistema cuya superficie límite está formada por las paredes interiores del cohete y por la sección de salida de la tobera. Esta sección no es una superficie material. También constituirían un sistema los gases expulsados por el cohete entre dos instantes dados. En este caso, la superficie límite no es material ni de forma fija, pues el chorro del cohete no está canalizado por ningún tubo material. También podemos considerar el sistema constituido por los electrodos, electrolito y gases existentes en el interior de una batería de acumuladores. En este caso, la superficie límite del sistema sería material toda ella, constituida por las paredes internas de la batería.

Cuando, como en este último caso, no hay flujo de materia a través de las paredes del sistema, se dice que éste es un sistema *cerrado*. En caso contrario, como en el ejemplo del combustible contenido en el cohete, el sistema se llama *abierto*.

Si el sistema está compuesto de distintas partes, cada una físicamente homogénea, limitadas por superficies bien definidas, se dice que el sistema es *heterogéneo* y cada una de las partes citadas es una *fase*. Así pues, una disolución o un líquido puro constituyen un sistema de una sola fase o sistema *homogéneo*. Una mezcla de agua y aceite es un sistema heterogéneo de dos fases.

Cada fase puede estar compuesta por varias especies moleculares. El menor número posible de especies moleculares que nos permita definir la composición de todas las fases del sistema es el *número de componentes* del sistema.

Un sistema que no pueda intercambiar calor con el medio exterior a él, ni pueda efectuar trabajo contra las fuerzas que el medio exterior le ejerza o recibir trabajo de dichas fuerzas, se dice que está *aislado*. Si no pudiera intercambiar calor pero sí efectuar o recibir trabajo, se dice que está *aislado térmicamente,* y cuando pueda intercambiar calor pero no pueda recibir ni entregar trabajo, se dice que está *aislado mecánicamente.*

Un sistema presenta siempre determinadas propiedades observables tales como la temperatura, densidad, presión y otras aún no mencionadas en este libro. Las magnitudes que miden dichas propiedades reciben el nombre de *coordenadas termodinámicas* o *variables de estado* del sistema. Su conocimiento determina el llamado *estado del sistema.* Pudiera ocurrir que dichas coordenadas no se mantuvieran constantes con el tiempo, pero si el sistema está aislado en el sentido más amplio, la experiencia nos enseña que la variación temporal de las coordenadas se va haciendo cada vez más lenta tendiendo a valores invariables con el tiempo, característicos para cada fase. En tal caso se dice que se tiene un *estado de equilibrio termodinámico*. Por ejemplo, si tenemos agua en las condiciones del punto triple, en un recipiente cerrado, la densidad en la fase gaseosa se mantiene invariable, pero diferente de la existente en un punto cualquiera de la fase líquida o de la sólida. La temperatura también se mantiene invariable y además es la misma para las tres fases.

El número de variables de estado que consideremos puede ser muy grande, pero el número de variables de estado *independientes* puede ser menor, por existir alguna relación entre aquéllas. Por ejemplo, si el sistema está constituido por un gas perfecto se cumple que para cada estado de equilibrio

$$p\,V = \frac{m}{M} R\,T \qquad \text{o sea} \qquad p = \rho \frac{R}{M} T$$

es decir, la presión, la densidad y la temperatura no son independientes, sino que, dadas dos de ellas, la tercera queda determinada automáticamente. El estado del sistema se conocerá, pues, si se conoce el valor de dos de las variables de estado.

La relación existente entre las variables de estado recibe el nombre de *ecuación de estado*. Hemos puesto el ejemplo de un gas perfecto, el cual da una ecuación muy sencilla. No obstante, en el caso de sistemas más complejos, las ecuaciones de estado no resultarán ser tan simples.

17.2 Diagramas termodinámicos. Acabamos de ver que en el caso de un gas perfecto, el estado del sistema queda determinado por el conocimiento de dos de sus coordenadas termodinámicas. En general, podemos aceptar que el estado de todo sistema simple homogéneo podrá definirse conociendo los valores de dos de sus variables de estado, si éstas son independientes entre sí. Podemos tomar estas dos variables como coordenadas de un sistema de dos ejes cartesianos rectangulares y cada punto del plano determinará un estado del sistema.

Cuando un sistema pasa de un estado a otro, se dice que ha sufrido una *transformación* o proceso. Los distintos estados intermedios por los que pasa estarán representados por distintos puntos que cons-

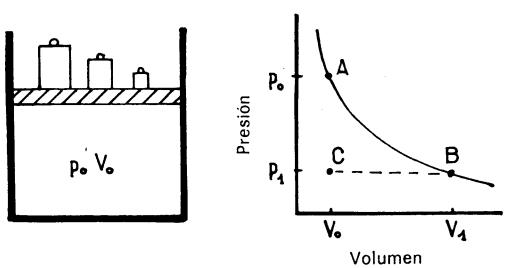


FIG. 17.1 Evolución isotérmica de un gas perfecto.

tituirán una curva en el plano de representación. Por ejemplo, consideremos (fig. 17.1) un gas perfecto encerrado en un cuerpo de bomba, o sea en un cilindro que tiene un émbolo que puede deslizar ajustando perfectamente. Si colocamos el cilindro en un baño a temperatura constante, se cumplirá la ley de Boyle-Mariotte $p\,V = \text{cons-}$

tante y los posibles estados de equilibrio vendrían representados en el diagrama de la figura 17.1 por una hipérbola equilátera *AB*.

Supongamos que el sistema se halla en equilibrio cuando al ocupar un volumen V_0 las pesas colocadas sobre el émbolo ejercen una presión p_0 (punto *A* del diagrama). Si quitamos una de las pesas, la presión exterior bajará bruscamente al valor p_1 y el punto *C* no correspondería a un estado de equilibrio. Debido a ello, el sistema evoluciona aumentando su volumen hasta el valor V_1, igualándose entonces la presión interior con la exterior p_1 restableciéndose el equilibrio (punto *B*). Durante la evolución, la temperatura del sistema no se habrá mantenido constante por haberse roto el equilibrio pero, al restablecerse, la temperatura volverá a ser igual a la del baño.

Si variáramos la presión exterior de manera gradual, no se produciría ninguna discontinuidad como el salto de *A* a *C* y los estados intermedios determinarían una línea continua que nos llevaría del estado inicial *A* al final *B* si las presiones inicial y final fueran p_0 y p_1, respectivamente. Uno de los infinitos caminos posibles entre *A* y *B* es la hipérbola equilátera de la figura 17.1 (cfr. § 17.3). En tal caso, el sistema mantiene siempre invariable su temperatura y la transformación se dice que es *isotérmica*. Para serlo, el sistema ha tenido que intercambiar calor con el baño. Cuando una transformación tiene lugar sin intercambio de calor con el medio exterior, se dice que es *adiabática*. Si una transformación tiene lugar a presión constante, recibe el nombre de *isobárica*, y si lo que se mantiene constante es el volumen, *isostérica* o *isocora*.

El diagrama p - V de la figura 17.1 recibe el nombre de *diagrama de Clapeyron*. En él las transformaciones isobáricas vienen representadas por rectas horizontales. Las isostéricas por rectas verticales, y las isotérmicas de gases perfectos por hipérbolas equiláteras de asíntotas coincidentes con los ejes de coordenadas.

En un diagrama V - T, en cambio, las transformaciones isostéricas estarán representadas por rectas horizontales y las isotérmicas por rectas verticales. Podríamos tomar también diagramas p - T y, en general, diagramas cuyas coordenadas sean dos variables de estado cualesquiera, algunas de las cuales se definirán más adelante (§§ 17.7, 17.8 y 17.17).

17.3 Transformaciones reversibles. Consideremos de nuevo el cuerpo de bomba de la figura 17.1 en su estado inicial y quitemos una pesa menor que la supuesta en el ejemplo antes considerado. La presión exterior sería igual a la ordenada del tramo *CC'* y *C'*

representa un nuevo estado de equilibrio (fig. 17.2). Quitemos otra pesa pequeña y se romperá el equilibrio dilatándose el sistema del estado D al D'. Si seguimos quitando las pesas adecuadas, llegaremos a alcanzar el estado de equilibrio final B tras seguir una sucesión de transformaciones en las cuales las presiones exteriores determinan una línea escalonada en el plano de Clapeyron. Si repitiéramos el proceso con pesas menores, el número de saltos sería mayor, así como el número de estados de equilibrio intermedios C', D', ..., etc.

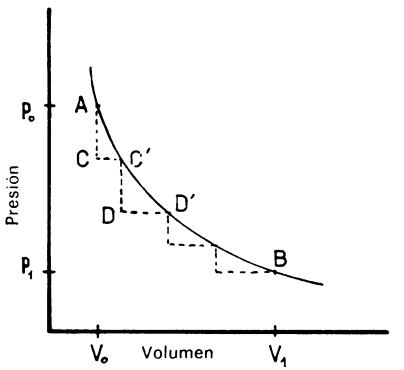


FIG. 17.2 La transformación reversible corresponde a una evolución a lo largo de la curva $AC'D'B$.

Si la presión p_0 la ejerciera un montón de harina en vez de un conjunto de pesas, al ir quitandó uno a uno los granos de harina el número de estados de equilibrio C', D', ..., entre A y B sería muy grande. Se comprende, pues, que si las variaciones de presión fueran infinitamente pequeñas, los estados intermedios serían todos de equilibrio, ya que al tender a infinito el número de escalones de la línea quebrada, ésta tiende a la curva $AC'D'B$ (que en el ejemplo es una rama de hipérbola).

Esta transformación será infinitamente lenta por la manera como ha tenido lugar pasando por infinitos estados de equilibrio. Como, en cualquier instante, el sistema está en equilibrio, una modificación infinitamente pequeña de las condiciones exteriores podrá hacer evolucionar al sistema en uno u otro sentido (por ejemplo, según aumentemos o disminuyamos infinitamente poco la presión) y por ello a este tipo de transformaciones se las llama *reversibles*. Téngase bien presente, pues, que en una transformación reversible:

1.° *Todos los estados intermedios son de equilibrio.*
2.° *A partir de un estado intermedio cualquiera podemos hacer*

evolucionar el sistema en un sentido o en el opuesto, modificando infinitamente poco las condiciones exteriores.

Se comprende que si el sistema se dilata siguiendo la evolución representada por CC' (fig. 17.2), aumentando infinitamente poco la presión en un estado intermedio entre C y C' no conseguiremos comprimir el sistema, pues la presión exterior seguirá siendo inferior a la interior. *Para invertir el sentido de evolución en una transformación irreversible será necesario modificar apreciablemente las condiciones exteriores.*

17.4 Trabajo de dilatación de un sistema. Hemos dicho que un sistema es una porción de materia contenida dentro de una superficie cerrada (cfr. § 17.1). Vamos a considerar que el sistema está limitado por una superficie S (fig. 17.3) la cual, al dilatarse el sistema, puede variar de forma y tamaño.

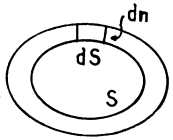


FIG. 17.3 Dilatación elemental de un sistema.

Sea p la presión exterior al sistema la cual supondremos que, en cada instante, es la misma en todos los puntos de S y supongamos ésta descompuesta en elementos de superficie dS cada uno de los cuales estará sometido a una fuerza normal a él $p\,dS$. Al aumentar el volumen del sistema de V a $V + dV$ dilatándose contra la presión exterior p, el elemento dS se desplaza una distancia dn a lo largo de su normal hacia fuera, para lo cual el sistema deberá realizar, contra las fuerzas exteriores, un trabajo $(p\,dS)\,dn$. Sumando los trabajos correspondientes a todos los elementos de superficie tendremos

$$dW = \Sigma\, p\,dS\,dn = p\,\Sigma\, dS\,dn = p\,dV$$

ya que $dS\,dn$ es el volumen barrido por dS y la suma de los correspondientes a todos los elementos de superficie nos da el aumento de volumen del sistema.

Cuando el sistema se dilate aumentando su volumen una cantidad finita, podremos considerar esta dilatación como una sucesión de dilataciones elementales dV y sumando los trabajos correspondientes a todas ellas tendremos

$$W = \int p \, dV \tag{17.1}$$

como expresión del trabajo efectuado por el sistema al dilatarse. Si el sistema se comprimiera, los dV serían negativos y el signo — del trabajo significaría que es el medio exterior el que lo ha efectuado sobre el sistema.

Se comprende que, si la dilatación es reversible, p representa también la presión en el interior del sistema, pues éste pasa siempre por estados de equilibrio.

En el diagrama de Clapeyron, la ecuación 17.1 representa el área comprendida entre la curva AB representativa de la transformación, las ordenadas trazadas a los puntos extremos y el eje de abscisas, ya que la franja sombreada (fig. 17.4) tiene por área $p\,dV$, o sea el trabajo correspondiente a una dilatación elemental y sumando los correspondientes a todas las dilataciones que lleven del estado inicial A al B tendríamos el área total mencionada.

El lector puede comprobar que las dimensiones del producto de una presión por un volumen coinciden con las de un trabajo y si expresamos la presión en N/m^2 y el volumen en m^3, el trabajo vendrá dado en *joule*. Análogamente, si la presión se da en *barias* y el volumen en cm^3, el trabajo vendrá dado en *erg*. Dejamos como ejercicio hallar la equivalencia entre el joule y la *atmósfera-litro*, que es el trabajo efectuado por un sistema al aumentar su volumen 1 litro dilatándose contra una presión exterior de 1 atmósfera.

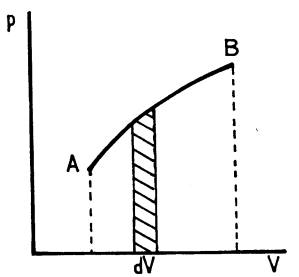


FIG. 17.4 El área indicada mide el trabajo en la dilatación representada.

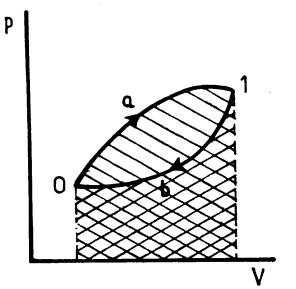


FIG. 17.5 Ciclo.

17.5 Transformaciones cerradas. Cuando un sistema evoluciona partiendo de un estado inicial y volviendo finalmente a él, se dice que ha recorrido un *ciclo* o que ha sufrido una *transformación cerrada*.

Así, si partimos de un estado inicial 0 (fig. 17.5) y pasamos al estado 1 a través de los estados intermedios representados por la curva 0*a*1 y luego volvemos al estado inicial 0 a través de los estados intermedios representados por 1*b*0, habremos recorrido un ciclo.

Al recorrer el punto figurativo la rama 0*a*1, el sistema ha efectuado un trabajo positivo medido por el área bajo dicha rama, pero al recorrer la rama 1*b*0 el trabajo efectuado es negativo (compresión) medido por el área bajo la curva 1*b*0, con lo que, al recorrer el ciclo, el sistema habrá efectuado un trabajo *total* igual al área encerrada por el ciclo. En este ejemplo, el trabajo total es positivo por ser mayor el minuendo que el sustraendo, pero si las evoluciones hubieran tenido lugar en sentido contrario al supuesto, el trabajo total sería negativo, o sea el medio exterior habría efectuado sobre el sistema más trabajo que éste sobre aquél. Luego podemos concluir: *Cuando se recorre un ciclo en el sentido de las agujas del reloj* (en el diagrama de Clapeyron), *el trabajo total efectuado por el sistema es positivo.* Si el sentido de recorrido es el opuesto, el trabajo total efectuado por el sistema será negativo. En ambos casos, *el área encerrada por el ciclo en el diagrama de Clapeyron mide el trabajo efectuado por el sistema o sobre él.*

17.6 Principio de conservación de la energía. Ya vimos en § 7.6 el concepto de conservación de la energía mecánica. Dicha conservación excluía la presencia de fuerzas de rozamiento, por no ser éstas conservativas. Así, un sistema mecánico que no efectúa trabajo contra fuerzas exteriores tendrá una energía mecánica decreciente si en él existen rozamientos. Pero si a la energía mecánica correspondiente a un instante le sumamos el calor desprendido hasta dicho instante en los rozamientos, veremos que esta suma mantiene invariable su valor. Vemos, pues, que al agregar a las energías cinética y potencial la energía calorífica, la energía total del sistema se conserva.

El sistema mencionado es particularmente simple. En un sistema general pueden existir otros tipos de energía: un condensador cargado contiene energía eléctrica que aparece en forma de calor al descargarlo uniendo las armaduras con un conductor. Una pila contiene una energía química que se transforma en eléctrica y ésta puede convertirse en trabajo mecánico en un motor eléctrico. Las partículas en un núcleo atómico tienen una energía de enlace que en las explosiones atómicas se transforma en calor y en trabajo, etc. Pues bien: en todos los fenómenos observados hasta la fecha ocurre que *cuando se comunica energía, bajo cualquier forma, a un sistema que a su vez cede energía al medio exterior, la energía entregada al sistema es*

igual a la cedida por éste más el incremento del caudal de energía del sistema en todas sus formas.

Este principio de conservación fue defendido en 1847 por HERMANN VON HELMHOLTZ (1821-1894) demostrando su validez en Mecánica, Termología, Electricidad, Magnetismo, Química física y Astronomía. Hoy constituye uno de los pilares más firmes de la Ciencia, pues no se ha hallado aún ningún fenómeno que lo vulnere.

Del enunciado que hemos dado se deduce que si el sistema está aislado (no puede intercambiar energía alguna con el exterior), el caudal de energía que posee se ha de mantener constante, por lo que si desaparece una cantidad de energía en una de sus formas (mecánica, eléctrica, etc.) deberá aparecer una cantidad igual en otra (u otras) forma.

17.7 Primer principio de la Termodinámica. Consideremos un sistema que con el medio exterior intercambie energía en forma de trabajo y calor solamente. Al experimentar la transformación $0a1$ (fig. 17.5), el sistema realiza un trabajo exterior W mientras absorbe una cantidad de calor Q. La conservación de la energía nos dice que el caudal energético del sistema quedará incrementado en una cantidad

$$\Delta U = Q - W \tag{17.2}$$

Si vuelve el sistema al estado inicial mediante la transformación $1b0$ se tendrá

$$\Delta U' = Q' - W' \tag{17.3}$$

donde W' es el trabajo realizado por el sistema (negativo en este caso) y Q' el calor absorbido por él (negativo si lo cede). Sumando las ecuaciones 17.2 y 17.3

$$\Delta U + \Delta U' = (Q + Q') - (W + W') \tag{17.4}$$

Ahora bien, un sistema de funcionamiento cíclico que realice un trabajo exterior sin absorber una cantidad equivalente de calor se denomina *móvil perpetuo de primera especie* y todos los intentos de construir un tal móvil han fracasado, por lo que postularemos su imposibilidad dado que todas las consecuencias que se derivan de este postulado están corroboradas por la experiencia. Por tanto, deberá ser

$$Q + Q' = W + W'$$

o sea que *el calor total absorbido por el sistema al recorrer un ciclo es igual al trabajo total que realiza contra las fuerzas exteriores* (primer principio de la Termodinámica), y de la ecuación 17.4 resulta que

$$\Delta U + \Delta U' = 0$$

Al caudal energético U del sistema se le da el nombre de *energía interna,* y vamos a ver que es una variable de estado. En efecto: consideremos un vector ficticio **f** tal que su circulación a lo largo de un camino en el diagrama de Clapeyron sea igual al incremento (ecuación 17.2) de la energía interna del sistema. En virtud del enunciado dado para el primer principio, la circulación de **f** a lo largo de un ciclo cualquiera es siempre nula y por tanto (cfr. § 3.3) **f** representará un campo conservativo y su circulación entre dos puntos cualesquiera del plano de Clapeyron no dependerá del camino seguido entre ellos. Así pues, el incremento ΔU de la energía interna del sistema al pasar del estado 0 al 1 será el mismo si se pasa por la rama *a* (fig. 17.5) que por la rama *b* o por otro cualquiera de los infinitos caminos que llevan de 0 a 1. De acuerdo con lo visto en § 3.3, la función U queda definida en cada punto salvo una constante aditiva cuyo valor quedará determinado si fijamos el valor de U en un estado (en particular el cero de energía interna). Por tanto, *la energía interna es función de estado.* O sea, fijado su valor en un punto del plano de Clapeyron, a cada punto de dicho plano corresponde un valor de U y sólo uno.

Ésta es una propiedad que no tiene el trabajo. En efecto: imaginemos que al punto 0 (fig. 17.5) le asignáramos un valor del trabajo. Al pasar de 0 a 1 por la rama superior, el sistema realizaría un cierto trabajo que sumado con el valor asignado al estado 0 nos daría el valor correspondiente al estado 1. Ahora bien, si pasáramos de 0 a 1 por la rama inferior, el trabajo realizado sería menor que *antes* (compárense las áreas bajo 0*a*1 y 0*b*1) y al sumarlo al valor asignado al estado 0 nos daría para el estado 1 un valor inferior al obtenido en el otro caso considerado. Cada camino entre 0 y 1 nos conduciría a un valor diferente para el trabajo correspondiente al estado 1 y por tanto el trabajo no es variable de estado. Esto equivale a decir que un sistema no contiene trabajo. Como tampoco contiene calor.

En efecto: la ecuación 17.2 podemos escribirla en la forma

$$Q = W + (U_1 - U_0) \qquad (17.5)$$

$U_1 - U_0$ es una cantidad fija, y si W depende del camino seguido para ir de 0 a 1, también dependerá Q. Luego el calor tampoco es variable de estado.

No obstante, aun cuando el trabajo exterior realizado por el sistema y el calor que absorbe dependan del camino seguido en la transformación, su diferencia sólo depende de los estados inicial y final, según nos indica la ecuación 17.2.

La ecuación 17.5 nos permite enunciar el primer principio de la Termodinámica de la manera siguiente: *Cuando a un sistema se le cede una cantidad de calor Q, la invierte en realizar un trabajo exterior y en incrementar su energía interna.* Téngase en cuenta que cada una de las tres cantidades que figuran en la ecuación 17.2 puede ser positiva, nula o negativa.

17.8 Entalpía; experimento de Joule y Kelvin. Llamamos *entalpía* de un sistema a la variable de estado definida por

$$H = U + pV \tag{17.6}$$

Si un sistema evoluciona *a presión constante,* diferenciando la ecuación 17.6 se tendrá

$$dH = dU + p\,dV \tag{17.7}$$

Por otra parte, si consideramos que al sistema se le suministra una cantidad de calor infinitesimal dQ, su volumen aumentará en dV y el trabajo que realiza en su dilatación será (cfr. § 17.4) $p\,dV$, llamando dU al incremento de su energía interna, el primer principio impone que

$$dQ = dU + p\,dV \tag{17.8}$$

que constituye la expresión del primer principio para una transformación elemental cualquiera.

Comparando las ecuaciones 17.7 y 17.8 concluimos que: *Cuando un sistema evoluciona a presión constante, el calor absorbido es igual al incremento de su entalpía.* Si la presión no se mantuviera constante, la ecuación 17.7 no sería cierta, pues al diferenciar la ecuación 17.6 se tendría

$$dH = dU + p\,dV + V\,dp \tag{17.9}$$

y comparando las ecuaciones 17.8 y 17.9 resulta como expresión para el primer principio

$$dQ = dH - V\,dp \tag{17.10}$$

Vamos a considerar ahora un importante experimento realizado por JOULE en colaboración con LORD KELVIN (1824-1907) que contribuyó al conocimiento de las fuerzas que se ejercen entre sí las moléculas de los fluidos.

Por un tubo, en el que se ha intercalado un tabique poroso, circula un fluido bajo la acción de una presión exterior. En la figura 17.6 hemos esquematizado el tabique por uno con un sólo orificio y la

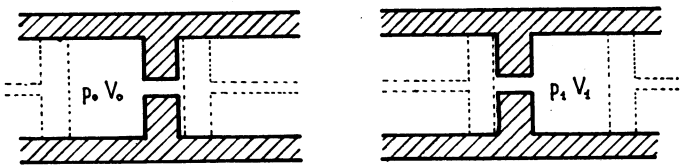


FIG. 17.6 Experimento de Joule y Kelvin.

presión exterior por sendos émbolos dibujados con líneas de puntos. Las paredes del tubo se suponen perfectamente aislantes, es decir, que no permiten pase el calor a su través.

Entre los émbolos está contenida una masa determinada de fluido que en el estado inicial (émbolo de la derecha, en contacto con el tabique) ocupa un volumen V_0 a una presión p_0. Al desplazarse el otro émbolo hacia la derecha manteniendo constante la presión p_0, el fluido atraviesa el tabique y al otro lado se halla sometido a una presión p_1 por efecto del émbolo correspondiente, el cual también se desplaza. Al final, el émbolo de la izquierda está en contacto con el tabique y la masa de gas ocupa un volumen V_1 a la presión p_1.

El sistema está aislado térmicamente, por lo que en la ecuación 17.5 $Q = 0$. Ha realizado un trabajo contra la presión exterior constante p_1 igual (cfr. ec. 17.1) a $p_1 V_1$ y en la compresión de la izquierda el medio exterior efectúa sobre él un trabajo $p_0 V_0$; por tanto, el trabajo total realizado contra las fuerzas exteriores será

$$W = p_1 V_1 - p_0 V_0$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 17.5 queda

$$0 = p_1 V_1 - p_0 V_0 + U_1 - U_0$$

de donde

$$U_0 + p_0 V_0 = U_1 + p_1 V_1 \qquad (17.11)$$

que nos dice que la entalpía del fluido se mantiene constante en su dilatación a través del tabique poroso.

Debe entenderse que los émbolos pueden no ser materiales y sólo sirven para limitar el sistema considerado.

Si el fluido es un líquido, se observa en él un enfriamiento al atravesar el tabique, así como una vaporización parcial.

Si se trata de un gas real, se observará un enfriamiento o un calentamiento según que su temperatura inicial T_0 sea inferior o superior, respectivamente, a un cierto valor crítico característico de cada gas, al cual se da el nombre de *temperatura de inversión*. El enfriamiento se interpreta como debido al trabajo que se efectúa contra las fuerzas de atracción moleculares y el calentamiento se explica por las variaciones del producto $p\,V$ al atravesar el tabique.

Si el gas puede considerarse como gas perfecto, no se observa variación de su temperatura durante la dilatación. Así pues, en virtud de la ley de Boyle-Mariotte, el producto $p\,V$ se mantiene constante y de la ecuación 17.11 resulta que tampoco varía la energía interna del sistema. En cambio, han variado la presión y el volumen. De aquí deducimos que la energía interna y la entalpía de un gas perfecto no dependen de la presión ni del volumen. La ley de Joule nos dice, pues, que: *La energía interna y la entalpía de un gas perfecto son funciones exclusivas de la temperatura.*

17.9 Calores molares de los gases perfectos. El calor que hay que suministrar a un gas para elevar su temperatura en una cantidad dada depende de cómo evolucione el gas durante la absorción de calor, ya que el gas efectúa un trabajo, al tiempo que absorbe calor, dependiendo dicho trabajo de la evolución. Por ello definiremos el *calor molar a volumen constante* de un gas como la cantidad de calor que hay que suministrar a un mol de dicho gas para que, manteniendo constante su volumen, eleve su temperatura un grado. Lo representaremos por C_v y se expresará en calorías/°C·mol, o en J/K·mol.

Así pues, para elevar en dT la temperatura de n moles de gas, a volumen constante, habrá que suministrar un calor

$$dQ = n\,C_v\,dT \tag{17.12}$$

Análogamente, definimos el *calor molar a presión constante* C_p de un gas, como la cantidad de calor que hay que suministrar a un mol de gas para que, manteniendo constante su presión, eleve su temperatura un grado. Las unidades serán las mismas que para C_v.

Si se mantiene constante la presión del gas se tendrá, pues,

$$dQ = n\,C_p\,dT \tag{17.13}$$

Dividiendo estos calores molares por la masa molecular del gas, tendremos los calores específicos correspondientes.

Consideremos ahora una transformación a volumen constante de un gas perfecto.* Sustituyendo la ecuación 17.12 en la ecuación 17.8 y teniendo en cuenta que $dV = 0$ queda

$$dU = n\,C_v\,dT \tag{17.14}$$

Ahora bien, esta relación entre la energía interna y la temperatura será válida aunque la transformación no sea isostérica, pues la ley de Joule nos dice que la energía interna *de un gas perfecto* sólo depende de la temperatura y por tanto su variación no puede depender de que el volumen se mantenga constante o no. Por tanto, para una transformación finita

$$\Delta U = n\,C_v\,\Delta T \tag{17.14 \textit{bis}}$$

Por otra parte, el calor absorbido por un sistema a presión constante es igual al incremento de su entalpía (cfr. § 17.8), luego

$$dH = n\,C_p\,dT \tag{17.15}$$

y también

$$\Delta H = n\,C_p\,\Delta T$$

que por ser la entalpía *de un gas perfecto* función exclusiva de la temperatura, constituye la relación existente entre entalpía y temperatura *en los gases perfectos,* cualquiera que sea la transformación que sufran.

La ecuación de estado de los gases perfectos sabemos que es

$$p\,V = n\,R\,T \tag{17.16}$$

Consideremos la presión constante y diferenciemos la ecuación 17.16

$$p\,dV = n\,R\,dT \tag{17.17}$$

y por ser constante la presión se cumple la ecuación 17.13. Sustituyendo las ecuaciones 17.13, 17.14 y 17.17 en la expresión del primer principio dada por la ecuación 17.8, queda

$$n\,C_p\,dT = n\,C_v\,dT + n\,R\,dT$$

* Se llama perfecto al gas que cumple las leyes de Boyle y Gay-Lussac y además tiene sus calores molares independientes de la temperatura. Si no se cumple este último requisito se dice que es un gas en el estado de Avogadro.

de donde resulta

$$C_p - C_v = R \tag{17.18}$$

ecuación llamada *relación de Mayer,* en la cual R debe expresarse en las mismas unidades que los calores molares.

17.10 Transformaciones adiabáticas de los gases perfectos. Consideremos un gas perfecto que se dilate sin absorber ni ceder calor ($dQ = 0$). Teniendo en cuenta la ecuación 17.14, la ecuación 17.8 queda en la forma

$$0 = n\,C_v\,dT + p\,dV \tag{17.19}$$

Si la transformación es reversible, todo los estados serán de equilibrio y podremos sustituir p por su valor despejado de la ecuación 17.16, lo que da

$$n\,C_v\,dT + \frac{n\,R\,T}{V}\,dV = 0$$

que dividiendo por $n\,C_v\,T$ queda

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v}\frac{dV}{V} = 0 \tag{17.20}$$

Haciendo

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{17.21}$$

y teniendo en cuenta la relación de Mayer (ec. 17.18), la ecuación 17.20 puede integrarse dando

$$\ln\,T + (\gamma - 1)\ln\,V = \text{const.}$$

o sea

$$\ln\,(T\,V^{\gamma-1}) = \text{const.}$$

de donde

$$T\,V^{\gamma-1} = \text{const.} \tag{17.22}$$

Eliminando T entre las ecuaciones 17.16 y 17.22, tenemos

$$p\,V^{\gamma} = \text{const.} \tag{17.23}$$

y si lo que eliminamos es V queda

$$\frac{T^{\gamma/(\gamma-1)}}{p} = \text{const.} \tag{17.24}$$

Las ecuaciones 17.22, 17.23 y 17.24 rigen las transformaciones adiabáticas de los gases perfectos. De las ecuaciones 17.21 y 17.18 se deduce que siempre $\gamma > 1$.

El trabajo en una transformación adiabática lo calcularemos, a partir de (17.19), despejando $p\ dV$ e integrando entre el estado 1 y el 2:

$$W = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 -n\,C_v\,dT = n\,C_v\,(T_1 - T_2)$$

si lo queremos expresar en función de los volúmenes V_1 y V_2 despejaremos las temperaturas T_1 y T_2 de la ley de los gases perfectos $pV = nRT$

$$T_1 = p_1\,V_1/nR \qquad T_2 = p_2\,V_2/nR,$$

con lo que:

$$W = \frac{C_v}{R}\,(p_1\,V_1 - p_2\,V_2) = \frac{C_v\,p_1\,V_1}{R}\left(1 - \frac{p_2\,V_2}{p_1\,V_1}\right),$$

pero de (17.23) $p_1\,V_1^{\ \gamma} = p_2\,V_2^{\ \gamma}$

así que

$$W = \frac{1}{R}\,C_v\,p_1\,V_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}\frac{V_2}{V_1}\right] = \frac{C_v}{R}\,p_1\,V_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

recordando que $R = C_p - C_v$ y que $C_p/C_v = \gamma$ dividiendo numerador y denominador por C_v:

$$W = \frac{p_1\,V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

Consideremos un gas perfecto que a la presión p_A ocupe un volumen V_A. En el diagrama de Clapeyron este estado del gas vendrá representado por el punto A (fig. 17.7) y si el gas evoluciona a tem-

peratura constante, el punto figurativo se moverá sobre la rama de hipérbola $p\,V = p_A\,V_A$ (isoterma I). Pero si a partir de dicho estado

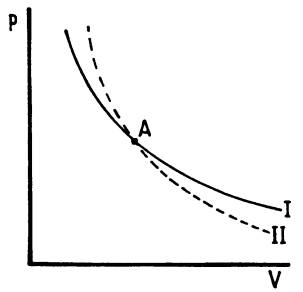


FIG. 17.7 Posición relativa de la isoterma y la adiabática correspondientes a un mismo estado.

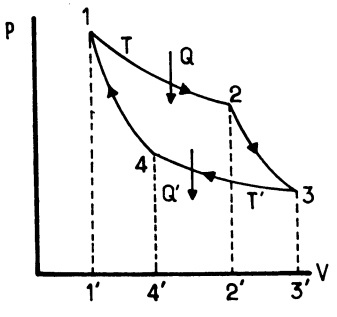


FIG. 17.8 Ciclo de Carnot.

evoluciona por vía adiabática, el punto figurativo recorrerá la curva II de ecuación $p\,V^\gamma = p_A\,V_A{}^\gamma$ (ec. 17.23) que, vamos a demostrar, tiene mayor pendiente en A que la isoterma.

En efecto: diferenciando $pV = p_A\,V_A = \text{constante}$, queda

$$p\,dV + V\,dp = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}$$

que, por el concepto geométrico de derivada, mide la pendiente en A de la isoterma. Por otra parte, diferenciando la ecuación 17.23 tenemos

$$p\,\gamma\,V^{\gamma-1}\,dV + V^\gamma\,dp = 0$$

de donde

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma\frac{p}{V}$$

que es la pendiente de la adiabática en A y vemos que es mayor que la de la isoterma por ser $\gamma > 1$. Luego si trazamos las familias de

isotermas y de adiabáticas en el plano de Clapeyron, en cada punto se cortarán una isoterma y una adiabática, teniendo ésta mayor pendiente (en valor absoluto) que aquélla.

17.11 Ciclo de Carnot. El físico francés SADI CARNOT (1796-1832), estudiando el funcionamiento de las máquinas térmicas, imaginó una máquina ideal constituida por un cuerpo de bomba que encierra una sustancia a la que se hace evolucionar de la manera siguiente:

1.° Tomando una cantidad de calor Q de un foco a temperatura T, se dilata isotérmicamente desde un estado 1 hasta otro estado 2 (fig. 17.8).

2.° Se aísla térmicamente la sustancia y sigue dilatándose por vía adiabática hasta un estado 3.

3.° El sistema se comprime isotérmicamente cediendo una cantidad de calor Q' a un foco a temperatura T' hasta un estado 4.

4.° Vuelve a aislarse térmicamente el sistema y prosigue su compresión por vía adiabática hasta alcanzar el estado 1 inicial, cerrándose el ciclo.

Es decir, el ciclo está constituido por dos isotermas y dos adiabáticas y es fácil de imaginar. No obstante, haremos algunas observaciones:

a) *Las transformaciones son todas reversibles.* Este hecho es obligatorio en toda transformación isotérmica, pues no hay manera de mantener constante la temperatura de un sistema en evolución por vía irreversible (escalones $ACC'DD' \ldots B$ en fig. 17.2). En cambio, una transformación adiabática puede ser irreversible, pues basta aislar térmicamente el sistema para que no intercambie calor con el medio exterior. Como en el ciclo de Carnot imponemos que sean también reversibles las adiabáticas, todos los puntos del ciclo de la figura 17.8 corresponden a estados de equilibrio del sistema.

b) Para mantener la temperatura constante el sistema debe intercambiar calor con el medio exterior. En la dilatación, deberá absorberlo al realizar un trabajo y en la compresión lo cederá. Esto se ve claro en el caso en que la sustancia evolutiva sea un gas perfecto, pues entonces la energía interna se mantiene constante en las transformaciones isotérmicas y por tanto el calor absorbido se convierte íntegramente en trabajo exterior. Si éste es positivo (dilatación 1-2) será positivo el calor absorbido. Si el trabajo exterior es negativo (compresión 3-4) será negativo el calor absorbido, es decir, el sistema cede un calor igual al trabajo de compresión. El área (122'1'1) pues, medirá el calor Q absorbido en la dilatación iso-

térmica y el área (433'4'4) el calor Q' desprendido en la compresión a temperatura T'. Los intercambios de calor los realiza el sistema con *fuentes térmicas,* entendiendo por tales sistemas capaces de absorber o ceder calor sin modificar su temperatura. Ésta deberá ser igual a la del sistema, pues siempre hay equilibrio.

c) En la dilatación adiabática el trabajo exterior del sistema es igual a la disminución de su energía interna y en la compresión adiabática el trabajo de compresión es igual al aumento de U ($Q = 0$ en la ecuación 17.5). Por tanto, las áreas (233'2'2) y (144'1'1) medirán las variaciones que sufre U en las transformaciones adiabáticas. En el caso de que el sistema sea un gas perfecto, en las transformaciones isotérmicas no habrá variación de U y el aumento en la compresión adiabática deberá ser igual a la disminución en la dilatación 2-3 por deber ser nula la variación total para un ciclo. Luego, en tal caso, las áreas (233'2'2) y (144'1'1) deberán ser iguales. La ecuación 17.14 *bis* nos dice que la disminución de energía interna en la dilatación adiabática origina descenso de la temperatura, es decir $T > T'$, y que en la compresión 4-1 la temperatura vuelve a elevarse. Dejamos como ejercicio el razonamiento análogo para la entalpía y deducir las variaciones de presión correspondientes con auxilio de la ecuación 17.10.

El ciclo de Carnot podría haberse seguido en sentido contrario al anterior, por ejemplo en el sentido 43214, ya que las transformaciones son todas reversibles. En tal caso, cambiarían los signos de las cantidades energéticas (trabajo, calor y variación de la energía interna) en cada tramo del ciclo y así resultaría que realizaríamos trabajo sobre el sistema (ciclo recorrido en sentido opuesto al de las agujas del reloj, cfr. § 17.5), que éste absorbería calor del foco frío y cedería calor al foco caliente. Es decir, tendríamos una *máquina frigorífica* en la que el calor cedido al foco caliente es la suma del tomado al foco frío más el trabajo gastado en el ciclo. Por llevar calor de una temperatura baja a otra alta, consumiendo trabajo, es por lo que algunos autores llaman *bomba de calor* a este artefacto.

17.12 Rendimiento de un ciclo de Carnot. Cuando el sistema, sea cual sea, de una o varias fases, haya recorrido todo el ciclo de Carnot en el sentido de las agujas del reloj, habrá efectuado un trabajo W que viene medido por el área (12341) encerrada por el ciclo. Habrá absorbido de la fuente térmica a temperatura T (o foco caliente) una cantidad de calor Q y llamaremos rendimiento r del ciclo de Carnot al cociente

$$r = \frac{W}{Q} \tag{17.25}$$

La definición no carece de lógica, pues W es el trabajo útil que se obtiene al tomar una cantidad de calor Q del foco caliente y esta cantidad mide, en cierto modo, el combustible gastado. También sería válida esta definición en el caso del ciclo frigorífico, pues la reversibilidad de las transformaciones no haría más que cambiar los signos de W y Q simultáneamente.

Como en todo ciclo el trabajo realizado ha de ser igual al calor total absorbido

$$W = Q + Q' \tag{17.26}$$

donde Q' es negativo en la máquina térmica por ser un calor que cede el sistema al foco frío. La ecuación 17.25 podrá, pues, escribirse en la forma

$$r = \frac{Q + Q'}{Q} = 1 + \frac{Q'}{Q} \tag{17.27}$$

donde $Q'/Q < 0$ por ser Q y Q' de signos contrarios. Es decir, el rendimiento es menor que la unidad.

En el caso de una máquina frigorífica, lo que interesa es extraer del foco frío la mayor cantidad posible de calor Q' a expensas del menor trabajo posible $-W$. Por ello, el *rendimiento de una máquina frigorífica* se define como

$$r' = -\frac{Q'}{W} = -\frac{Q'}{Q + Q'} \tag{17.27 bis}$$

y puede ser mayor que la unidad.

Vamos ahora a expresar el rendimiento en función de las temperaturas T y T'. De momento, sólo vamos a hacerlo para el caso en que la sustancia evolutiva sea un gas perfecto pero, más adelante (§ 17.15), veremos que la expresión obtenida vale también cuando la sustancia evolutiva sea otra cualquiera.

El gas perfecto, al dilatarse a la temperatura constante T desde el estado 1 al 2 efectúa un trabajo

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = n\,R\,T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n\,R\,T\,\ln\frac{V_2}{V_1}$$

donde se ha sustituido p por su valor despejado de la ecuación 17.16.

Este trabajo W_{12} es igual al calor Q absorbido, según se ha visto en § 17.11 (*b*). Luego

$$Q = n\,R\,T\,\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{17.28}$$

Análogamente,

$$Q' = n\,R\,T'\,\ln\frac{V_4}{V_3} \tag{17.29}$$

Los vértices del ciclo están simultáneamente sobre una isoterma y una adiabática y aplicando la ley de Boyle-Mariotte y la ecuación 17.23 tenemos

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma}$$

$$p_3 V_3 = p_4 V_4$$

$$p_4 V_4^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}$$

multiplicando ordenadamente estas ecuaciones y simplificando, resulta

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

luego

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \tag{17.30}$$

Dividiendo la ecuación 17.29 por la 17.28, teniendo en cuenta la ecuación 17.30, queda

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{T'}{T} \tag{17.31}$$

y sustituyendo en la ecuación 17.27 tenemos

$$r = \frac{T - T'}{T}$$

para el rendimiento de una máquina térmica de Carnot.

Análogamente, sustituyendo la ecuación 17.31 en la 17.27 *bis* se tiene para el rendimiento de una máquina frigorífica de Carnot

$$r' = \frac{T'}{T - T'}$$

Por último, en uno y otro caso, la ecuación 17.31 nos permite escribir

$$\frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} = 0 \tag{17.32}$$

es decir, en una máquina de Carnot la suma de los cocientes entre los calores absorbidos y las temperaturas a las cuales se absorben, es nula.

17.13 Necesidad de un criterio de evolución. El primer principio de la Termodinámica constituye una condición que debe cumplir toda transformación real. Sin embargo, podríamos imaginar transformaciones que cumplieran el primer principio y que, en cambio, fuera imposible realizar. Por tanto, dicho principio es condición necesaria, pero no suficiente, para que una transformación sea posible. Por ejemplo: Si en un calorímetro adiabático que contiene agua introducimos un cuerpo más caliente, éste cede calor al agua enfriándose y el agua absorbe aquel calor calentándose hasta alcanzar la temperatura común de equilibrio. Recíprocamente, imaginemos que partimos de este estado final y que *espontáneamente* el agua empieza a ceder calor al cuerpo, con lo que éste se calienta y aquélla se enfría, llegando a establecerse una diferencia de temperaturas. Los dos casos cumplen con el primer principio, pues el sistema calorimétrico está aislado termodinámicamente (es decir, $Q = 0$, $W = 0$) y como la energía que absorbe una parte es igual a la que cede la otra, *la energía interna del sistema aislado se conserva.* Sin embargo, nuestra experiencia nos dice que la segunda de las transformaciones no se produce nunca, pero sí la primera.

Análogamente, si tenemos un recipiente aislado y dividido en dos partes por un tabique, existiendo un gas en una parte y el vacío en la otra, al suprimir el tabique se dilata el gas ocupando el volumen total sin realizar trabajo exterior ni absorber calor. Recíprocamente, podríamos imaginar que de este estado final pasara el sistema al inicial dejando vacía la parte correspondiente. El primer principio no se opone a esto último, pues en ambos casos $Q = 0$, $W = 0$ y la energía interna se conserva. En cambio, sabemos que ello no ocurre.

Si en vez del vacío tuviéramos un gas diferente, al suprimir el tabique se irá difundiendo un gas en otro alcanzando un estado final de mezcla uniforme. Esto ocurre y está de acuerdo con el primer principio. Pero también lo estaría el hecho de que una mezcla de gases evolucionara separándose ambos espontáneamente y ocupando cada uno de ellos una parte distinta del recinto, cosa que no se observa.

Necesitamos, pues, un criterio que nos permita prever el sentido en que tendrá lugar espontáneamente una transformación que cumple con el primer principio. Dicho criterio complementaría al primer principio y constituiría el *segundo principio de la Termodinámica.*

17.14 Móvil perpetuo de segunda especie. Entendemos por tal una máquina de funcionamiento cíclico que tome calor de un solo foco calorífico y lo transforme íntegramente en trabajo. Como se ve, no está en contradicción con el primer principio y, sin embargo, cuantos intentos se han realizado para lograr el móvil perpetuo de segunda especie han fracasado. Admitiremos, pues, que es imposible construirlo y, como decía el profesor J. PALACIOS (1891-1970), las ventajas que nos reportaría el fallo de este principio, tales como poder construir naves que navegaran por los mares o por los aires aprovechando las grandes cantidades de energía acumuladas en el mar o en la atmósfera, compensarían sobradamente las desventajas dimanantes del fracaso de nuestras suposiciones.

El postulado de la *imposibilidad del móvil perpetuo de segunda especie* puede considerarse como un enunciado del segundo principio, si bien existen otros enunciados que son de aplicación más cómoda y que veremos más adelante (§§ 17.18, 17.19 y 17.20).

Como ejemplo de aplicación de este postulado, vamos a ver que un gas que ocupa un volumen no puede contraerse espontáneamente dejando un vacío. Espontáneamente significa: sin que desde el exterior se efectúe un trabajo para comprimirlo.

En efecto: Supongamos que un gas perfecto contenido en el cilindro de la figura 17.9 pudiera contraerse espontáneamente dejando

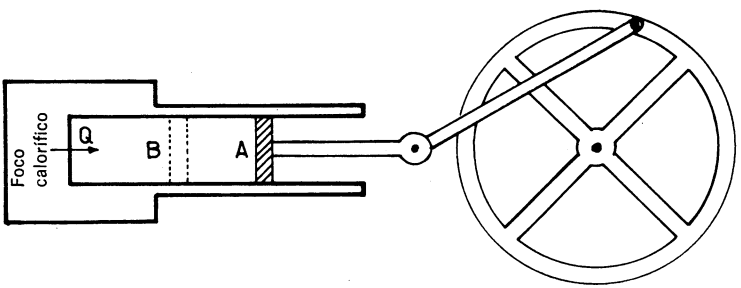


FIG. 17.9 Móvil perpetuo de segunda especie.

vacío el espacio comprendido entre las secciones *A* y *B*. Podríamos desplazar el émbolo de *A* a *B* sin hallar resistencia, o sea, sin efectuar trabajo alguno. Tomando calor del foco calorífico, el gas podría

dilatarse a temperatura constante ($\Delta U = 0$) con lo que $Q = W$, siendo Q el calor absorbido del foco y W el trabajo realizado contra las fuerzas exteriores en su dilatación de B a A. Se repite la contracción espontánea, luego la dilatación isotérmica y así sucesivamente. El dispositivo funcionará en forma cíclica transformando en trabajo calor tomado de un solo foco calorífico, lo cual vulneraría el postulado de imposibilidad enunciado. Luego: el gas no podrá contraerse en la forma antes mencionada.

17.15 Teorema de Carnot. *Todas las máquinas térmicas reversibles que funcionen entre las mismas temperaturas extremas tienen igual rendimiento.*

En efecto: Consideremos dos sistemas diferentes constituidos por sustancias cualesquiera que evolucionen reversiblemente recorriendo ciclos de Carnot entre las mismas temperaturas extremas T y T'. Si no son iguales los rendimientos de estas máquinas de Carnot, uno será mayor que otro. Llamemos A a la máquina de mayor rendimiento y B a la otra.

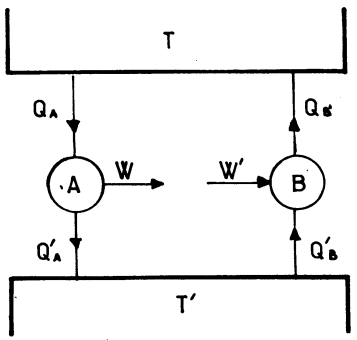


FIG. 17.10 Demostración del teorema de Carnot.

Como son reversibles, podremos hacer funcionar B como frigorífica y A como térmica (fig. 17.10). Tendremos

$$\begin{aligned} W &= Q_A + Q'_A \quad \begin{matrix} Q_A > 0 \\ Q'_A < 0 \end{matrix} \quad W > 0 \\ W' &= Q_B + Q'_B \quad \begin{matrix} Q_B < 0 \\ Q'_B > 0 \end{matrix} \quad W' < 0 \end{aligned} \tag{17.33}$$

La máquina B puede hacerse trabajar de manera que absorba del foco frío, en cada ciclo, la misma cantidad de calor que ceda a dicho

foco la máquina A (es cuestión de ajustar convenientemente la extensión de las transformaciones isotérmicas). En tal caso

$$Q'_B = -Q'_A \qquad \text{y} \qquad W' = Q_B - Q'_A \tag{17.34}$$

y podríamos prescindir del foco frío, pues el calor cedido por A podría llevarse directamente a B. Veamos si ha habido producción de trabajo: El trabajo total obtenido del sistema será el producido por A menos el consumido por B y lo obtendremos sumando la primera de las ecuaciones 17.33 con la ecuación 17.34

$$W + W' = Q_A + Q_B \tag{17.35}$$

Pero, según la ecuación 17.27

$$r_A = 1 + \frac{Q'_A}{Q_A} \qquad r_B = 1 + \frac{Q'_B}{Q_B}$$

y como suponemos $r_A > r_B$

$$\frac{Q'_A}{Q_A} > \frac{Q'_B}{Q_B}$$

y cambiando los signos de ambos miembros

$$\frac{-Q'_A}{Q_A} < \frac{Q'_B}{-Q_B}$$

y como $-Q'_A = Q'_B$

$$Q_A > -Q_B \qquad \text{de donde} \qquad Q_A + Q_B > 0$$

y se habría logrado un trabajo positivo intercambiando calor con un foco calorífico único, con lo cual el sistema sería un móvil perpetuo de segunda especie. Por tanto, hemos partido de una hipótesis falsa al considerar diferentes los rendimientos de las máquinas. Obsérvese que no se ha vulnerado el primer principio, pues el segundo miembro de la ecuación 17.35 es igual al calor total tomado del foco calorífico.

Consecuencia del teorema de Carnot es que el rendimiento de un ciclo de Carnot recorrido por una sustancia cualquiera es igual al del ciclo recorrido por un gas perfecto entre las mismas temperaturas extremas, es decir

$$r = \frac{T - T'}{T} \tag{17.36}$$

17.16 Escala termodinámica de temperatura. De lo dicho en § 16.1 se desprende que las distintas escalas de temperatura dependen de la sustancia termométrica. Ahora, sin embargo, estamos ya en condiciones de definir una escala de temperatura que no dependa de ella, gracias al teorema de Carnot. Así, tomando una sustancia termométrica cualquiera, la podemos hacer evolucionar entre dos focos caloríficos. Si podemos medir las cantidades de calor Q y Q' que absorbe de ellos la sustancia termométrica, la ecuación 17.31 nos permite conocer el cociente entre las temperaturas T y T' de los dos focos. Como dicho cociente, restado de 1, nos da el rendimiento que es independiente de la sustancia evolutiva, habremos logrado nuestro propósito.

Veamos de definir el tamaño del grado de temperatura. Si uno de los focos caloríficos está constituido por hielo, agua y su vapor en las condiciones del punto triple y le asignamos arbitrariamente el valor 273,16° a su temperatura, la medida de Q'/Q nos permitirá determinar la temperatura del otro foco calorífico. De esta manera resulta una escala que, según puede comprobarse, concuerda con la escala absoluta dada por un termómetro de gas perfecto y en la cual la temperatura de ebullición del agua a 1 atmósfera vale 373,15°. Esta escala fue propuesta por LORD KELVIN en 1848, por lo que las temperaturas absolutas pueden simbolizarse en la forma T K y la escala recibe el nombre de *escala Kelvin* o escala termodinámica de temperatura. Su no dependencia de la sustancia termométrica confiere a la temperatura los caracteres de una magnitud y da la posibilidad de medirla.

17.17 Entropía. Consideremos un sistema que recorra por vía reversible un ciclo representado por una curva cerrada C cualquiera en el plano de Clapeyron (fig. 17.11 *a*) en el sentido de las agujas del reloj, por ejemplo. Recubramos la zona limitada por la curva cerrada con ciclos de Carnot contiguos de manera que entre todos ellos cubran un área que coincida todo lo posible con la limitada por el ciclo. Cuanto mayor sea su número tanto más aproximada podrá ser la coincidencia. Hagamos que el sistema recorra sucesivamente todos los ciclos de Carnot en el sentido de giro de las agujas del reloj. En cada uno de ellos se cumplirá la ecuación 17.32 y tendremos tantas ecuaciones análogas a ésta como ciclos hayan y sumándolas todas

$$\sum \frac{Q}{T} = 0 \qquad (17.37)$$

Ahora bien, los tramos isotérmicos comunes a dos ciclos contiguos son recorridos dos veces, una en cada sentido (fig. 17.11 *b*), lo que dará lugar, en virtud de la reversibilidad, a contribuciones de igual valor absoluto, pero signos contrarios, con lo que la suma de la ecuación 17.37 queda reducida a sumar los cocientes Q/T correspondientes a los segmentos constituyentes de la línea dentada superpuesta a la curva representativa del ciclo.

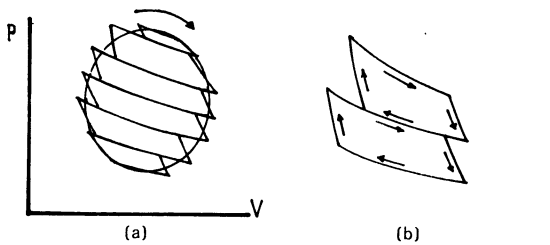


FIG. 17.11 *a*) Ciclo recubierto por ciclos de Carnot elementales. *b*) Dos ciclos contiguos recorridos en el mismo sentido.

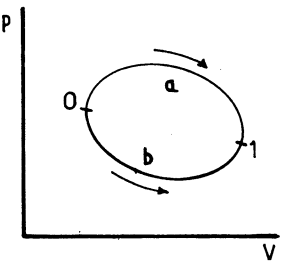


FIG. 17.12

Tomando ciclos de Carnot cada vez más estrechos (aumentando su número) los dientes constituidos por una transformación elemental adiabática seguida de una isotérmica tienden al elemento de longitud correspondiente del ciclo C considerado y la cantidad Q/T que le corresponde podemos escribirla en la forma dQ/T, pues el calor absorbido por el sistema será infinitesimal y la temperatura variará infinitamente poco. La suma de la ecuación 17.37 estará extendida a todos los elementos del ciclo C y la escribiremos en la forma:

$$\oint_r \frac{dQ}{T} = 0 \qquad (17.38)^*$$

donde la r indica que el ciclo se recorre por vía *reversible*.

En este caso, también podríamos considerar un vector ficticio **f** cuya circulación a lo largo de un elemento de ciclo C sea igual a la cantidad $dS = dQ/T$ correspondiente y como, cualquiera que sea el ciclo reversible, es nula la circulación de **f** a lo largo de él, **f** representará a un campo conservativo (cfr. § 3.3) y su circulación entre dos puntos cualesquiera del plano de Clapeyron no dependerá del

* El símbolo $\oint$ representa suma (o integral) extendida a todos los elementos que componen una curva *cerrada*.

camino seguido entre ellos. Dicha circulación entre los estados 0 y 1 será

$$\Delta S = \int_{0}^{1}{}_{r} \frac{dQ}{T} \tag{17.39}$$

y valdrá lo mismo a lo largo de la rama *a* (fig. 17.12) que de la *b* o de otra cualquiera que lleve de 0 a 1. De acuerdo con lo visto en § 3.3, quedará definida en cada punto una función S (salvo una constante aditiva arbitraria) a la que se da el nombre de ***entropía***. Fijado el valor de S en un estado, queda unívocamente determinado su valor en cualquier estado. Por tanto, *la entropía es una función de estado* y la diferencia entre las entropías de dos estados es igual (ec. 17.39) a la suma de los cocientes entre el calor absorbido por el sistema y la temperatura a la cual se absorbe, extendida a todas las transformaciones elementales que integran una transformación *reversible* que lleve del estado inicial al final.

Si pasáramos mediante una transformación irreversible del estado 0 al 1, la suma mencionada tiene un valor distinto, pero no la variación de la entropía que es la misma por ser ésta función de estado. Es decir

$$\int_{0}^{1}{}_{\text{irr.}} \frac{dQ}{T} \neq \int_{0}^{1}{}_{r} \frac{dQ}{T} = S_1 - S_0$$

Por tanto, para calcular la variación de entropía en una transformación irreversible, empezaremos por conocer los estados inicial y final y luego imaginar una transformación *reversible* que lleve del primero al segundo. El cálculo de la suma de la ecuación 17.39 para esta transformación ideal dará la variación de entropía buscada.

Ejemplo. Calentamos una masa de 100 g de agua desde 27°C hasta 77°C sin que se vaporice nada. ¿Cuál es la variación de entropía del agua?

El calentamiento en un hornillo es totalmente irreversible, pues la temperatura de éste es mucho mayor que la del agua. Pero sabemos que pasa de 27°C = 300 K hasta 77°C = 350 K y la masa sigue siendo 100 g. Una transformación reversible que llevara del estado inicial al final podría consistir en lo siguiente: poner el agua en contacto con una fuente térmica de temperatura superior a la del agua en una cantidad infinitamente pequeña dT, con lo que los 100 g absorberán una cantidad de calor

$$dQ = 100\, dT$$

y la entropía aumentará en

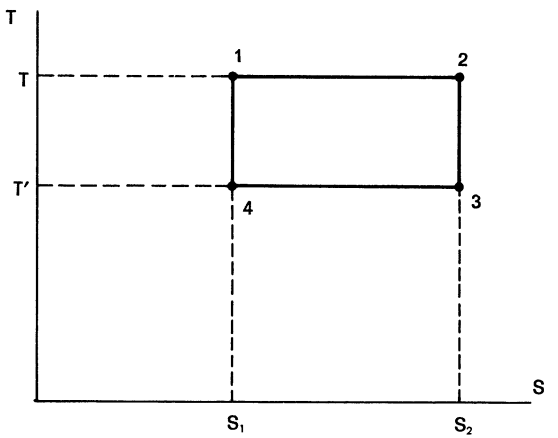
$$dS = 100 \frac{dT}{T}$$

igualándose la temperaturas del agua y de la fuente térmica. Sustituir ésta por otra de temperatura infinitamente poco superior y así sucesivamente hasta alcanzar la temperatura final. La ecuación 17.39 da entonces

$$\Delta S = \int_{300}^{350} 100 \frac{dT}{T} = 100 \ln \frac{350}{300} = 15{,}4 \text{ cal/ K}$$

Es interesante hacer notar que *en las transformaciones reversibles, la entropía de todo sistema aislado se conserva.* En efecto: si el sistema está aislado, una parte de él cederá calor a otra parte, pero como la transformación es reversible, las dos partes han de estar en equilibrio y por tanto a la misma temperatura. La variación de entropía de la parte que absorbe calor será dQ/T y la de la parte que lo cede será $-dQ/T$. La suma de ambas variaciones es nula, como queríamos demostrar.

Vamos a determinar el rendimiento de un ciclo de Carnot, expresando dicho ciclo en el diagrama $T - S$.



Las isotermas son rectas $T = C^{te}$ paralelas al eje S y las adiabáticas $S = C^{te}$ son paralelas al eje T.

El ciclo de Carnot se convierte en un rectángulo de base $S_2 - S_1$ y altura $T - T'$.

Hemos visto que $dQ = T\,dS$

La cantidad de calor comunicada en la isoterma

$$Q = \int_1^2 T\,dS = (S_2 - S_1)\,T$$

la cantidad de calor cedida al refrigerante

$$Q' = \int_3^4 T' \, dS = (S_1 - S_2) \, T'$$

el trabajo $W = Q + Q'$

el rendimiento $r = W/Q = \dfrac{(S_2 - S_1) \, T - (S_2 - S_1) \, T'}{(S_2 - S_1) \, T} = \dfrac{T - T'}{T}$

que es el resultado obtenido en § 17.12.

17.18 Segundo principio de la Termodinámica. Vamos a admitir que *cuando en un sistema aislado tiene lugar una transformación irreversible, aumenta la entropía del sistema.* Este postulado lo admitimos porque todas las consecuencias que se derivan de él vienen refrendadas por la experiencia y constituye el criterio (cfr. § 17.13) que permite decidir cuál es el sentido real de evolución que tendrá una transformación, ya que las transformaciones reales son irreversibles y si una transformación evolucionara en un sentido que hiciera disminuir la entropía de un sistema aislado, sería falsa.

Así, por ejemplo, dos cuerpos a distinta temperatura puestos en presencia dentro de un calorímetro adiabático, intercambian calor. El calor cedido por el cuerpo 1 será igual al que absorbe el cuerpo 2. Imaginemos el cuerpo 1 cediendo el calor dQ a una fuente térmica a la misma temperatura T_1 que él y el cuerpo 2 tomando el calor de otra fuente térmica a la temperatura T_2 igual a la suya propia. De esta manera las transformaciones serán reversibles y podremos afirmar que el cuerpo 1 disminuye su entropía en dQ/T_1, mientras que el 2 la aumenta en dQ/T_2. El aumento total de entropía del sistema será, pues,

$$dS = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

como ha de ser positivo, deberá ser $T_2 < T_1$, o sea que el cuerpo más caliente será el que ceda calor y el más frío quien lo absorba. Lo contrario daría lugar a una disminución de la entropía del sistema aislado y no podrá producirse. Esto corresponde al primero de los ejemplos del § 17.13.

Vayamos al tercero de los ejemplos citados y para facilitar el cálculo consideremos que se tiene un mol de cada gas y que los volúmenes de las dos partes determinadas por el tabique son iguales. La difusión de un gas en el otro puede imaginarse que se efectúa reversiblemente y cada gas pasa de ocupar un volumen inicial V_0 a ocupar un volumen final doble, manteniéndose constante la temperatura. Esto último hace que el calor absorbido por cada gas sea igual al trabajo exterior que realiza en su dilatación (cfr. § 17.11 b), por

tanto, para cada uno de ellos

$$dQ = dW = p\,dV = R\,T\,\frac{dV}{V}$$

y

$$\frac{dQ}{T} = R\,\frac{dV}{V}$$

de donde

$$\Delta S = \int_{V_0}^{V_1} R\,\frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_1}{V_0}$$

y como $V_1/V_0 = 2$, el logaritmo es positivo y el incremento de entropía del sistema también lo será, pues es el doble. En cambio, pasar espontáneamente de este estado al inicial haría que cada gas pasara de un volumen $2\,V_0$ al V_0 y el incremento de entropía de cada gas sería $R \ln \frac{1}{2}$, que es negativo, así como el del sistema $2\,R \ln \frac{1}{2}$. Luego la separación espontánea de los gases mezclados no será posible.

Dejamos como ejercicio aplicar este método al segundo de los ejemplos del § 17.13 que ya se discutió en el § 17.14 aplicando el principio de imposibilidad del móvil perpetuo de segunda especie.

El enunciado con que hemos iniciado este § 17.18 puede interpretarse diciendo que en todas las transformaciones reales (irreversibles) se genera entropía y que, por tanto, la variación de entropía de un sistema podrá escribirse siempre en la forma

$$\Delta S = \Delta_r S + \Delta_i S \tag{17.40}$$

donde $\Delta_r S$ es la entropía cedida al sistema, o tomada de él, por una cesión o absorción de calor por su parte y viene dada por la ecuación 17.39, mientras que $\Delta_i S$ es la entropía generada en el sistema por la irreversibilidad de las transformaciones que tengan lugar.

17.19 Rendimiento de las máquinas reales. Consideremos una máquina térmica real que funcione cíclicamente tomando, en cada ciclo, un calor Q de un foco a temperatura T y cediendo un calor $-Q'$ a otro foco a temperatura $T' < T$. Esto equivale a decir que el sistema toma del primer foco una entropía Q/T y del segundo Q'/T', siendo $Q' < 0$. Así pues:

$$\Delta_r S = \frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} \tag{17.41}$$

Como la entropía es función de estado, para un ciclo $\Delta S = 0$. Teniendo esto en cuenta y sustituyendo la ecuación 17.41 en la 17.40 tendremos

$$\frac{Q}{T} + \frac{Q'}{T'} + \Delta_i S = 0 \tag{17.42}$$

Despejando Q' y sustituyendo su expresión en la ecuación 17.26, el trabajo total realizado por la máquina en un ciclo resulta ser

$$W = Q\left(1 - \frac{T'}{T}\right) - T'\,\Delta_i S \tag{17.43}$$

y dividiendo esta expresión por Q tendremos el rendimiento R de la máquina real

$$R = \frac{W}{Q} = \frac{T - T'}{T} - \frac{T'\,\Delta_i S}{Q} \tag{17.44}$$

o sea

$$R = r - \Delta r \tag{17.45}$$

donde r es el rendimiento de la máquina reversible que funciona entre las mismas temperaturas extremas y Δr es positivo por serlo siempre $\Delta_i S$ en virtud del segundo principio, así como Q en las máquinas térmicas.

Si la máquina fuera frigorífica, todo lo dicho sigue siendo válido sin más que cambiar de signo W, Q y Q'. En tal caso, $\Delta r < 0$ y podríamos escribir

$$R = r + \Delta r'' \tag{17.45 \textit{bis}}$$

siendo $-\Delta r = \Delta r'' > 0$.

Pero R no es el rendimiento de la máquina frigorífica en el sentido usual. Dicho rendimiento tiene por definición la ecuación 17.27 *bis*, por lo que despejando Q' de la ecuación 17.42, cambiando su signo y dividiendo por W dada por la ecuación 17.43, resulta para el rendimiento R' de la máquina frigorífica real

$$R' = \frac{T'}{T - T'} + \frac{TT'\,\Delta_i S}{(T - T')\,W} \tag{17.46}$$

donde el segundo término del segundo miembro es negativo por ser W la única cantidad negativa que figura en él y como el primer término es el rendimiento r' de la máquina frigorífica reversible, resulta

$$R' = r' - \Delta r' \tag{17.47}$$

donde $\Delta r' > 0$.

Las ecuaciones 17.45 y 17.47 nos indican que *los rendimientos de las máquinas reales, térmica y frigorífica, son siempre inferiores a los de las máquinas ideales reversibles correspondientes que funcionen entre las mismas temperaturas.* Enunciado equivalente al dado en § 17.18, pues se deduce de él directamente, por lo que puede considerarse como otra expresión del segundo principio de la Termodinámica.

17.20 Otros enunciados del segundo principio. Consideremos una máquina térmica A y otra frigorífica B, *ambas reales,* funcionando en la forma esquematizada en la figura 17.10. En virtud de las ecuaciones 17.45 y 17.45 *bis*

$$\frac{W}{Q_A} = R_A = r - \Delta r \quad \text{o sea} \quad W = Q_A\,(r - \Delta r) \tag{17.48}$$

$$\frac{W'}{Q_B} = R_B = r + \Delta r'' \quad \text{o sea} \quad W' = Q_B\,(r + \Delta r'') \tag{17.49}$$

Vamos a considerar, primeramente, el caso en que el trabajo realizado por A se invierta íntegramente en mover B con lo cual el trabajo total realizado por el sistema es nulo. Es decir

$$W + W' = 0$$

Sumando las ecuaciones 17.48 y 17.49 resulta

$$r\,(Q_A + Q_B) = Q_A\,\Delta r - Q_B\,\Delta r'' \tag{17.50}$$

Los signos de las cantidades de calor son los indicados en las ecuaciones 17.33 y Δr y $\Delta r''$ son positivos, luego los dos términos del segundo miembro son positivos y por tanto deberá ser

$$Q_A > -Q_B = |\,Q_B\,|$$

Lo que significa que A toma del foco caliente más calor que el que a éste devuelve B, por lo que dicho foco ha cedido, verdaderamente, calor.

Por otra parte, estamos considerando que $W = -W'$ o sea que, teniendo en cuenta las ecuaciones 17.33

$$Q_A + Q'_A = -\,(Q_B + Q'_B)$$

pero

$$|\,Q_A + Q'_A\,| = |\,Q_A\,| - |\,Q'_A\,|$$

y

$$|Q_B + Q'_B| = |Q_B| - |Q'_B|$$

y como estas diferencias han de ser iguales y el minuendo de la primera es mayor que el de la segunda, lo mismo deberá ocurrir con los sustraendos, luego

$$|Q'_A| > |Q'_B|$$

y como el foco frío recibe una cantidad de calor

$$|Q'_A| - |Q'_B| > 0$$

resulta que ha habido un tránsito de calor del foco caliente al frío sin que el sistema haya consumido trabajo del exterior. Dicho tránsito tiende a cero cuando tiendan a cero Δr y $\Delta r''$, es decir, cuando se tienda a la reversibilidad.

Para conseguir el tránsito de calor en sentido opuesto debería invertirse el signo del segundo miembro de la ecuación 17.50, lo cual exige que por lo menos una de las Δ sea negativa, lo que haría que una de las dos máquinas tuviera un rendimiento superior al de la correspondiente reversible, lo cual es imposible según se ha visto en § 17.19 luego: *no puede circular espontáneamente calor de un cuerpo frío a otro más caliente.* Este enunciado es el propuesto por R. CLAUSIUS (1822-1888) como segundo principio de la Termodinámica y hemos visto que se deduce del dado en § 17.18, por lo que son equivalentes.

Consideremos ahora que, desde el exterior, se realiza un trabajo *sobre* el sistema. Esto equivale a decir que el trabajo exterior realizado *por* el sistema, es negativo, o sea

$$W + W' < 0 \tag{17.51}$$

y consideremos que a consecuencia de ello $Q_A = -Q_B$. Sustituyendo esta igualdad en las ecuaciones 17.48 y 17.49, sumándolas y teniendo en cuenta la ecuación 17.51 resulta

$$W + W' = -Q_A (\Delta r + \Delta r'') < 0 \tag{17.52}$$

y el trabajo total recibido del exterior será

$$-(W + W') = Q_A (\Delta r + \Delta r'') > 0$$

y por otra parte, sumando las ecuaciones 17.33 tenemos

$$-(W + W') = -Q_A - Q'_A - Q_B - Q'_B = -Q'_B - Q'_A$$

que es igual al calor extraído del foco frío. En cambio, del otro foco la cantidad de calor extraída es siempre nula ($Q_A = -Q_B$).

El dispositivo no es un móvil perpetuo de segunda especie pues no *realiza* trabajo sino que lo *absorbe*. Para que lo fuera, debería cambiar el sentido de la desigualdad 17.52 y ello obligaría a que por lo menos una de las Δ fuera negativa, o sea a que una de las máquinas reales tuviera rendimiento superior al de la máquina reversible correspondiente, lo cual es imposible según § 17.19. Por tanto, vemos que *el principio de la imposibilidad del móvil perpetuo de segunda especie es equivalente al segundo principio de la Termodinámica* dado en § 17.18.

El caso en que el intercambio de calor tenga lugar sólo con el foco caliente conduce a la misma conclusión y su demostración la dejamos como ejercicio.

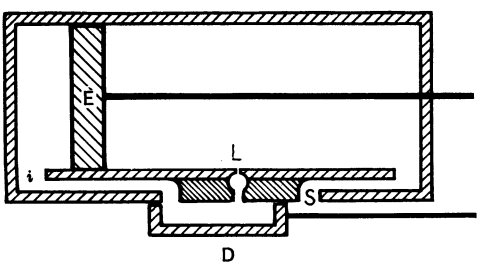
CICLOS EN LA TERMODINÁMICA TÉCNICA

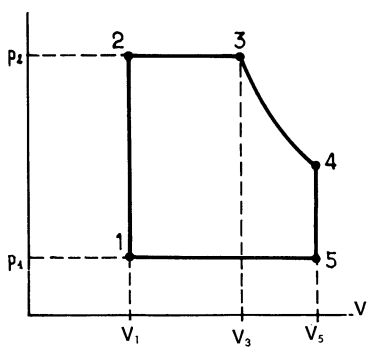
Ya vimos en § 17-19 que los rendimientos de las máquinas térmicas reales son siempre inferiores a los de las máquinas ideales reversibles correspondientes que funcionen entre las mismas temperaturas. Como el ciclo de Carnot de la máquina ideal no puede realizarse en la práctica para producir trabajo a partir de energía térmica, se utilizan otros ciclos más adecuados con rendimientos inferiores.

Examinemos tres de ellos.

1. Ciclo de una máquina de vapor

El foco caliente es una caldera a la temperatura T y el foco frío es el condensador a temperatura T'.





Tramo 1-2

El vapor procedente de la caldera llega al cilindro a través de la salida L y la entrada i. La presión p_1 (debida a la tensión del vapor del condensador) pasa a p_2 (presión en la caldera) al mismo tiempo que la temperatura pasa de T' a T. En este proceso el volumen puede considerarse prácticamente constante.

Tramo 2-3

El émbolo se desplaza hacia la derecha por efecto de la presión constante p_2 hasta que el volumen sea V_3.

Tramo 3-4

El distribuidor D se ha desplazado obstruyendo la entrada de vapor. El émbolo continúa desplazándose sin aporte de energía (podemos considerar expansión adiabática) hasta V_4, la temperatura ha descendido de T_3 a T''.

Tramo 4-5

El émbolo llega a su posición extrema. El distribuidor, en su desplazamiento, ha abierto la salida de vapor (s) y éste pasa al condensador y la presión desciende bruscamente a p_1 manteniéndose el volumen constante.

Tramo 5-1

El émbolo se mueve hacia su posición inicial empujado por los restos de vapor a presión constante p_1 hasta que el volumen sea V_1.

El trabajo en el tramo 1-2 y en el 4-5 son nulos por permanecer constante el volumen.

El tramo 2-3 es una expansión a presión constante, luego

$$W_{23} = p_2 (V_3 - V_2)$$

El tramo 3-4 es una expansión adiabática, luego

$$W_{34} = \frac{p_2 V_3}{(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

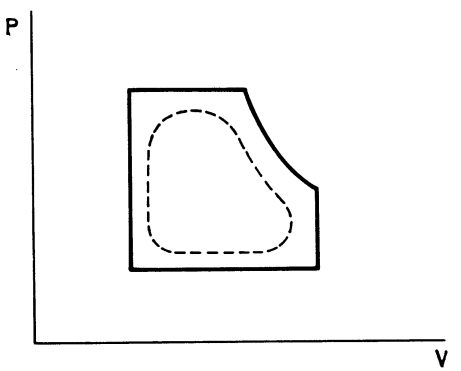
En el tramo 5-1 hay compresión isobárica, luego

$$W_{5\,1} = p_1\ (V_1 - V_5)$$

El trabajo total es:

$$W = p_2\,(V_3 - V_2) - p_1\,(V_5 - V_1) + \frac{p_2\,V_3}{(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}\right]$$

El ciclo real de las máquinas de vapor no es exactamente el descrito. Hay pérdidas de calor en los procesos que hemos considerado adiabáticos, el volumen no es rigurosamente constante en los tramos 1-2 y en 4-5. El ciclo real es interior al ciclo descrito. Tiene la forma

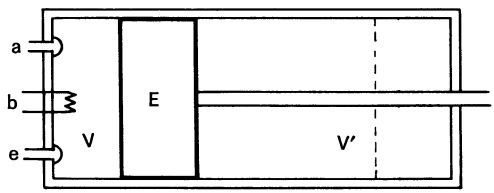


indicada en la figura adjunta. El trabajo que realiza la máquina real es inferior al calculado antes. El rendimiento de una máquina real tal como la considerada es inferior al 20 %. Una máquina ideal de Carnot operando entre las mismas temperaturas tendría un rendimiento del 36 %. En las turbinas de vapor pueden lograrse rendimientos reales superiores al 20 %.

2. Ciclo de un motor de combustión interna de cuatro tiempos

Los motores de combustión interna pueden ser de combustible gaseoso (motores de gas) o de combustible líquido (gasolina, alcohol, etcétera). En el caso de combustible gaseoso, éste se mezcla con aire en una proporción determinada, entra en el cilindro y se inflama mediante una chispa eléctrica. En el caso de combustible líquido se pulveriza y se mezcla con aire antes de entrar en el cilindro y se inflama por medio de la chispa de una bujía. En ambos casos, el resultado de la combustión es una cantidad de calor que eleva la temperatura de los gases producto de la combustión y una dilatación de éstos que produce trabajo.

A continuación representamos esquemáticamente el cilindro con el émbolo (E), las válvulas de admisión (a) y de escape (e), la bujía (b) productora de la chispa. El volumen inicial es V y el final, después de la carrera del émbolo es V'. Al lado representamos el diagrama termodinámico del ciclo considerado.



Esquema del cilindro

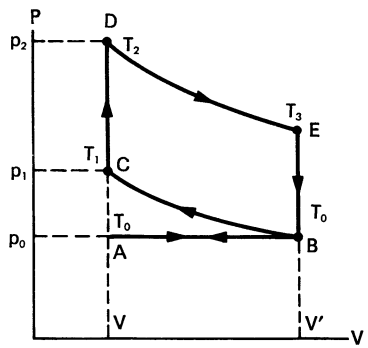


Diagrama termodinámico

Vamos a considerar lo que ocurre en cada uno de los cuatro tiempos.

Primer tiempo: (admisión). El émbolo se desplaza hasta V' aspirando la mezcla que entra por la válvula (a) en un proceso a presión constante p_0. Tramo AB.

Segundo tiempo: (compresión). El émbolo se desplaza hacia la izquierda y comprime adiabáticamente la mezcla hasta el volumen V. Su temperatura se eleva de T_0 a T_1 y su presión de p_0 a p_1. Tramo BC.

Tercer tiempo: (explosión). La chispa de la bujía provoca la explosión. La presión cambia instantáneamente de p_1 a p_2 manteniéndose el volumen constante (tramo CD) y la temperatura se eleva de T_1 a T_2 debido al calor de la combustión (explosión). A continuación el émbolo se desplaza hacia la derecha dando lugar a una expansión adiabática del gas hasta que el volumen sea V' y la temperatura T_3 (tramo DE). Cuando el émbolo llega a la posición extrema, se abre la válvula (e), la presión cae a p_0 y la temperatura a T_0 (tramo EB).

Cuarto tiempo: (expulsión o escape). El émbolo se desplaza hacia la izquierda y obliga a los gases de la combustión a salir por la válvula de escape (e). Tramo BA.

Para hallar el rendimiento, primero calcularemos los trabajos realizados en cada tramo del diagrama. Los trabajos en el primer tiempo y en el cuarto son iguales pero de signo contrario $W_{AB} = -W_{BA}$ su suma es nula y no hay que tenerlos en cuenta en el trabajo total.

En el tramo BC tenemos una compresión adiabática:

$W_{BC} = -W_{CB}$. Calcularemos $-W_{CB}$

$$-W_{CB} = \frac{p_0 V'}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V'}{V} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

En el tramo DE una expansión adiabática cuyo trabajo es W_{DE}

$$W_{DE} = \frac{p_2 V}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V}{V'} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

En los tramos CD y EB el trabajo es nulo, por lo que el trabajo total es $W_{DE} - W_{CB}$. **Pero**

$$p_2 V = n R T_2;\ p_0 V' = n R T_0;\ \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{C_v}{R};$$

$$\left(\frac{V}{V'}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \qquad (17.53)$$

Entonces:

$$W = W_{DE} - W_{CB} = \frac{n R T_2}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) + \frac{n R T_0}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) =$$

$$= \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_3 + T_0 - T_1)$$

Para hallar el rendimiento solamente nos falta el calor aportado al sistema que vale $Q = n\ C_v\ (T_2 - T_1)$ que es la energía térmica de la explosión. Luego:

$$r = \frac{W}{Q} = \frac{R}{(\gamma - 1)\, C_v}\left(1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}\right) = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

en virtud de (17.53).

A veces se prefiere darlo en función de los volúmenes V y V'

$$r = 1 - (V/V')^{\gamma-1} \quad = 1 - \frac{1}{(V'/V)^{\gamma-1}}$$

Al cociente V'/V se le llama *razón de compresión*. Al aumentar la razón de compresión aumenta el rendimiento.

El rendimiento también puede hallarse, de manera más rápida, teniendo en cuenta que $W = Q + Q'$ siendo Q' el calor perdido que vale $Q' = -n\ C_v\ (T_3 - T_0)$ (tramo EB). El rendimiento será

$$r = (Q + Q')/Q = 1 + \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

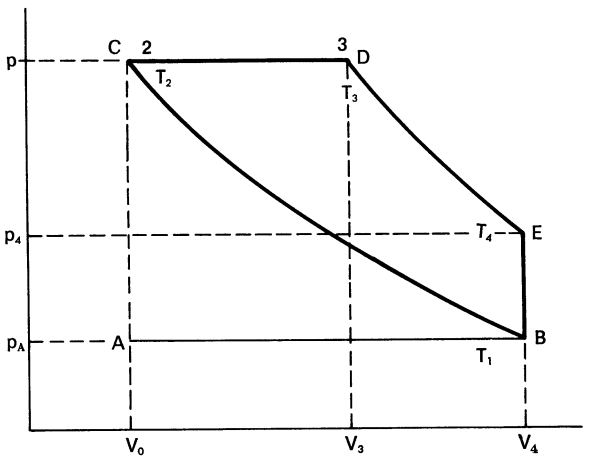
pero de (17.53) $T_0 = T_1\ T_3/T_2$

$$r = 1 - T_3\ (1 - \frac{T_1}{T_2})/(T_2 - T_1) = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

que es el resultado obtenido antes.

Ciclo del motor Diesel de cuatro tiempos

Se diferencia del anterior en que la ignición de la mezcla se efectúa sin chispa de bujía, simplemente por elevación de la temperatura en la compresión adiabática.



Vamos a examinar los fenómenos propios de cada tiempo.

Primer tiempo: (admisión). Tramo *AB*. Entra aire a la presión constante, p_A, atmosférica.

Segundo tiempo: Se comprime adiabáticamente este aire de V_2 a V_0, la presión aumenta de p_A a p y la temperatura de T_1 a T_2 que es mucho mayor que la inicial.

Tercer tiempo: se empieza inyectando el combustible (gas-oil) que se inflama en contacto con el aire caliente y se desprenden los gases de la combustión que mezclados con el aire caliente empujan el émbolo a presión, prácticamente constante, desde V_0 a V_3. La temperatura se eleva como consecuencia de la combustión pasando de T_2 a T_3 (tramo *CD*). A continuación esta mezcla de gases se expansiona adiabáticamente (tramo *DE*) hasta que el volumen sea V_4. Al llegar a este punto a la presión p_4 y temperatura T_4, se abre la válvula de expulsión y la presión desciende, a volumen constante V_4 de p_4 a p_A (tramo *EB*).

Cuarto tiempo: El movimiento del émbolo hacia la izquierda obliga a los gases a salir al exterior del cilindro (expulsión) tramo *BA*.

Vamos a determinar el trabajo realizado y el rendimiento.

Llamando Q al calor comunicado y Q' el calor perdido, tendremos:
Calor Q comunicado en el tramo CD a presión constante p

$$Q = n\,C_p\,(T_3 - T_2).$$

Calor perdido en el tramo EB a volumen constante

$$Q' = n\,C_v\,(T_1 - T_4) = -\,n\,C_v\,(T_4 - T_1).$$

La diferencia $W = Q + Q'$ es el trabajo realizado.
El rendimiento: $r = (Q + Q')/Q = 1 + Q'/Q$

$$r = 1 - \frac{n\,C_v\,(T_4 - T_1)}{n\,C_p\,(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1\,[(T_4/T_1) - 1]}{\gamma\,T_2\,(T_3/T_2 - 1)}$$

Vamos a relacionar el rendimiento con los volúmenes.
De las adiabáticas

$$\left.\begin{aligned} p\,V_3^{\gamma} &= p_4\,V_4^{\gamma} \\ p\,V_0^{\gamma} &= p_A\,V_4^{\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \frac{p_4}{p_A} = (V_3/V_0)^{\gamma}$$

de la isobara $V_3/V_0 = T_3/T_2$

de la isocora $p_4/p_A = T_4/T_1 = \left(\frac{V_3}{V_0}\right)^{\gamma}$

Además $T_1\,V_4^{\gamma-1} = T_2\,V_0^{\gamma-1}$

de donde

$$r = 1 - \frac{1}{\gamma}\,\frac{\left(\frac{V_3}{V_0}\right)^{\gamma} - 1}{\left(\frac{V_4}{V_0}\right)^{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_3}{V_0}\right) - 1\right]}$$

donde $\frac{V_4}{V_0}$ y $\frac{V_3}{V_0}$ son las razones de compresión y de expansión.

El rendimiento r puede superar el 35 %.

18

Teoría cinética de los gases

La teoría cinética de los gases estudia las propiedades macroscópicas de los mismos partiendo de un modelo microscópico. En esta teoría se aplica la Mecánica newtoniana al movimiento de las moléculas del gas y empleando un método estadístico se hallan los valores medios de las propiedades de dichas moléculas en su movimiento, siendo estos valores medios los que realmente se observan y miden en la práctica. El desarrollo de esta teoría se debe fundamentalmente a los trabajos de MAXWELL y BOLTZMANN realizados en el siglo XIX.

18.1 Postulados de la teoría cinética. Para construir el modelo microscópico, base de la teoría cinética de los gases, se parte de las hipótesis siguientes:

1. Los gases están constituidos por partículas, llamadas moléculas, que constan a su vez de uno o más átomos y que para un cuerpo puro o compuesto son todas iguales.
2. Las moléculas se mueven de manera totalmente desordenada y en su movimiento obedecen a las leyes de la Dinámica newtoniana.
3. El número de moléculas es grande y, dado su movimiento desordenado, el número de moléculas que se mueven en una dirección es, por término medio, el mismo que el de las que se mueven en otra dirección cualquiera.
4. El volumen ocupado por las propias moléculas es despreciable frente al volumen ocupado por el gas.
5. Las moléculas no se ejercen fuerzas mutuas salvo durante un choque y, por consiguiente, el movimiento entre choques sucesivos es rectilíneo y uniforme.
6. Los choques de las moléculas entre sí y con las paredes son

perfectamente elásticos y de muy corta duración. Si no se cumpliera esto, el gas perdería energía en cada choque y a consecuencia de ello disminuiría su temperatura.

Las hipótesis 4 y 5 se cumplen en los gases perfectos y en los gases reales a baja presión. Si la presión fuera relativamente elevada, las moléculas estarían muy condensadas y la suma de sus volúmenes propios no sería despreciable frente al volumen total ocupado por el gas. El hallarse tan próximas unas a otras, hace que las fuerzas de atracción que se ejerzan puedan considerarse permanentes, es decir, no nulas aunque muy inferiores a las que se ejercen al chocar.

18.2 Interpretación cinética y cálculo de la presión de un gas. Supongamos que tenemos un gas encerrado en un recipiente cuya forma es la de un paralelepípedo rectángulo. Las velocidades de las moléculas varían de una a otra tanto en módulo como en dirección y sentido, pero debido a que el movimiento es totalmente desordenado

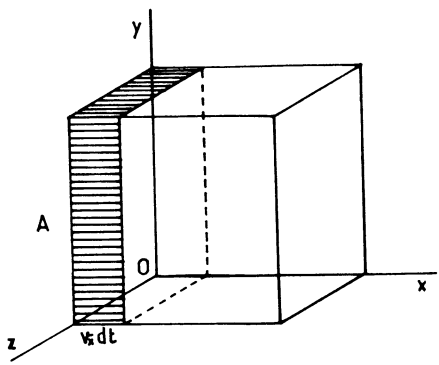


FIG. 18.1

y al gran número de moléculas, todas las direcciones y sentidos son igualmente probables. Suponiendo que en el volumen V del recipiente se encuentren N moléculas, de ellas habrá N_x cuya velocidad tenga una componente según el eje x igual en valor absoluto a v_x y por lo tanto N_x/V moléculas por unidad de volumen que cumplen tal requisito. Vamos a determinar las moléculas existentes en un volumen cuya base sea la cara A normal al eje x y de área S y cuya altura sea $v_x\,dt$ (figura 18.1). El volumen es $S\,v_x\,dt$ y contiene $(S\,v_x\,dt)\,(N_x/V)$ moléculas cuyas componentes según x de la velocidad tengan el valor mencionado. La mitad de estas moléculas se

mueven hacia la derecha y la otra mitad lo hacen hacia la izquierda. La mitad de dichas moléculas contenidas en el volumen elemental considerado chocan contra la pared en el intervalo de tiempo dt, con lo que podemos escribir que el número de moléculas dN que chocan en el intervalo citado y con la componente v_x de la velocidad mencionada es

$$dN = \frac{1}{2} S v_x \, dt \frac{N_x}{V} \tag{18.1}$$

Como el intervalo elemental de tiempo dt lo podemos tomar tan pequeño como queramos, no habrá por qué considerar los choques entre moléculas. En el choque con la pared de cada una de las moléculas se conservan las componentes de la cantidad de movimiento según los ejes z e y, pero la componente según x sufre una variación debido al cambio de sentido de la velocidad. Siendo el choque con la pared perfectamente elástico y dada la pequeña masa de la molécula, despreciable frente a la de la pared, v_x es la misma aunque de sentido contrario, y siendo m la masa de una molécula, la variación de la componente x de su cantidad de movimiento es

$$m v_x - (-m v_x) = 2 m v_x$$

lo cual representa para los dN choques que tienen lugar en un tiempo dt, una variación de la cantidad de movimiento

$$m S \frac{N_x v_x^2}{V} dt$$

que mide el impulso ejercido sobre la cara A por las moléculas cuya componente x de la velocidad tiene por valor absoluto v_x. Sumando los impulsos debidos a todas las moléculas que chocan contra A, cualquiera que sea su velocidad, tendremos

$$F \, dt = \frac{m S}{V} (\Sigma N_x v_x^2) \, dt$$

y la fuerza que se ejerce sobre la cara A será:

$$F = \frac{m S}{V} \sum_x N_x v_x^2 \tag{18.2}$$

o sea que debido a los impactos de las moléculas sobre dicha cara se ejerce una fuerza y por tanto una presión

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{V} \Sigma N_x v_x^2$$

multiplicando y dividiendo por N podemos escribir

$$p = \frac{m N}{V} \cdot \frac{\Sigma N_x v_x^2}{N}$$

Ahora bien, $(\Sigma N_x v_x^2)/N$ es el valor medio de v_x^2 para todas las moléculas y se designa por $\bar{v}_x^2$, con lo que la presión será

$$p = \frac{m N}{V} \bar{v}_x^2 \tag{18.3}$$

Sabemos que el cuadrado del módulo de la velocidad es

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

y el valor medio del mismo será

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 \tag{18.4}$$

y como todas las direcciones del movimiento son igualmente probables, $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$ y por tanto $\bar{v}^2 = 3\,\bar{v}_x^2$, con lo que

$$p = \frac{1}{3} \frac{m N}{V} \bar{v}^2 \tag{18.5}$$

como $m N$ es igual a la masa del gas, $m N/V$ es la densidad ρ del mismo y podremos escribir la presión en la forma

$$p = \tfrac{1}{3} \rho \bar{v}^2 \tag{18.6}$$

De la ecuación 18.5 resulta

$$p V = \tfrac{1}{3} m N \bar{v}^2 \tag{18.7}$$

En estas relaciones se pone de manifiesto que la presión de un gas depende de las propiedades de sus moléculas.

Hemos calculado la presión ejercida sobre una cara y el resultado habría sido el mismo si hubiéramos considerado otra cara cualquiera, pues bastaría tomar como eje x uno normal a ella. O sea, que considerando la cara normal al eje y, bastaría considerar los valores N_y y v_y en vez de N_x y v_x, respectivamente, y obtendríamos

el mismo resultado para la presión, ya que resulta ser independiente de x, de y o de z.

Despejando $\bar{v}$ en la ecuación 18.6 obtenemos la llamada *velocidad cuadrática media*

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \tag{18.8}$$

La celeridad de propagación del sonido por un gas viene dada por la ecuación 12.9, y dividiendo la ecuación 18.8 por la 12.9 tenemos

$$\frac{\bar{v}}{v} = \sqrt{\frac{3}{\gamma}}$$

de donde se desprende que la velocidad cuadrática media es ligeramente superior a la celeridad de propagación del sonido por un gas a igualdad de presión y temperatura (para la misma ρ). Por ejemplo, en el hidrógeno $\bar{v} = 1838$ metros por segundo y $v = 1286$ m/s; en el aire $\bar{v} = 485$ m/s y $v = 331$ m/s (todos estos valores corresponden a condiciones normales de presión y temperatura). Esta proximidad de valores puede explicarse con nuestro modelo cinético. Cuando una onda sonora se propaga por un gas, existe un movimiento de las moléculas en conjunto, en la dirección de propagación de la onda, superpuesto al movimiento totalmente desordenado. La energía sonora se transmite precisamente por los choques sucesivos de las moléculas en aquella dirección y la velocidad de propagación de esta energía será comparable a la velocidad cuadrática media. Las moléculas apenas se desplazan en sus incesantes choques, pero sí lo hace la energía. A este desplazamiento lento de las moléculas, a pesar de lo elevado de sus velocidades individuales, se debe el hecho de que el aroma de un perfume se difunda lentamente por el aire de una habitación. Ahora bien, si establecemos una corriente de aire, la difusión es más rápida; existe un movimiento unidireccional superpuesto al aleatorio de las moléculas.

Los hechos que acabamos de mencionar constituyen una prueba a favor del modelo adoptado para la teoría cinética de los gases y vamos a ver que de la expresión deducida para la presión se deducen consecuencias establecidas y comprobadas experimentalmente.

18.3 Consecuencias de la teoría cinética. La energía cinética de traslación de las moléculas del gas es

$$E_c = \Sigma_i \tfrac{1}{2} m v_i^2 = \tfrac{1}{2} m N \bar{v}^2 \tag{18.9}$$

que comparada con la ecuación 18.7 nos permite escribir

$$p V = \tfrac{2}{3} E_c \tag{18.10}$$

Agregando a las seis hipótesis de § 18.1 una nueva consistente en admitir que si se conserva la energía cinética total de traslación per-

manece constante la temperatura (lo cual constituye la introducción del concepto de temperatura en la teoría cinética), la ecuación 18.10 nos dice que en las transformaciones isotérmicas se mantiene constante el producto $p\,V$, lo cual no es sino la ley de Boyle-Mariotte. Es más, podemos decir que la energía cinética total de traslación de las moléculas del gas es proporcional a la temperatura absoluta, pues la experiencia enseña que lo es el producto $p\,V$ y nuestro modelo cumple con la ecuación 18.10. Luego

$$E_c = C\,T$$

y si la cantidad de gas en el volumen V es un mol, haciendo $C = 3\,R/2$ y sustituyendo en la ecuación 18.10 resulta

$$p\,V = R\,T \tag{18.11}$$

que es la ecuación de estado para un mol de gas perfecto.

Sustituyendo $p\,V$ por su valor obtenido de la ecuación 18.7 podemos escribir

$$\tfrac{1}{3}\,m\,N\,\bar{v}^2 = R\,T \qquad \text{o bien} \qquad \tfrac{2}{3}\,N\,\tfrac{1}{2}\,m\,\bar{v}^2 = R\,T$$

donde $\frac{1}{2}\,m\,\bar{v}^2$ representa la energía cinética media por molécula que llamaremos E_m. Ahora bien, como hemos considerado un mol de gas, N será el número de moléculas en un mol de gas, es decir, el *número de Avogadro*. Éste es una constante universal que puede medirse por más de 14 procedimientos distintos basados en diversos fenómenos físicos y químicos en los que interviene, pudiendo medirse en ellos con la misma precisión aproximadamente. El valor aceptado es $6{,}023 \times 10^{23}$ moléculas/mol. Representaremos este número por N_a y escribiremos

$$\frac{2}{3}\,N_a\,E_m = R\,T \quad \text{de donde} \quad E_m = \frac{3}{2}\,\frac{R}{N_a}\,T = \frac{3}{2}\,k\,T \tag{18.12}$$

a R/N_a se le da el nombre de constante de Boltzmann y se representa por k. R es una constante universal que vale 8,314 J/mol·°K, y como N_a es también constante universal, k lo será siendo su valor

$$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/molécula} \cdot \text{K}$$

De la ecuación 18.12 deducimos que *la energía cinética media de una molécula de un gas cualquiera, a una temperatura dada, es siempre la misma.*

En el cero absoluto, $T = 0$ y, según lo anterior, la energía cinética media de las moléculas sería nula. Pero tengamos en cuenta que todos los razonamientos se refieren a los gases perfectos. A temperaturas próximas al cero absoluto los gases se licuan, e incluso se solidifican, y por tanto no podemos aplicar a ellos aquellas leyes a tales temperaturas.

18.4 Ley de Dalton. Hasta aquí hemos supuesto que todas las moléculas que constituían la masa gaseosa eran iguales, por tratarse de un cuerpo puro. Consideremos ahora que dicha masa esté constituida por una mezcla de h gases, de cada uno de los cuales intervienen N_i moléculas de masa m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, h$), y sigamos admitiendo para ellas las hipótesis de § 18.1.

Podemos escribir la ecuación 18.10 en la forma

$$p = \frac{2}{3V} E_c$$

en donde V es el volumen ocupado por las moléculas y E_c la energía cinética total de traslación de dichas moléculas; podemos extender dicha ecuación al caso de la mezcla de gases y la energía cinética total será la suma de las de cada una de las moléculas. Pero como el valor medio de la energía de una molécula es el mismo para todas las moléculas de cualquier gas a una temperatura dada,

$$E_c = E_m \Sigma N_i$$

y la presión

$$p = \frac{2}{3V} E_m \Sigma N_i$$

y como según la ecuación 18.12

$$E_m = \tfrac{3}{2} k T$$

tendremos

$$p = \frac{1}{V} k T \Sigma N_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, h) \tag{18.13}$$

Queremos hacer resaltar que el razonamiento seguido para obtener la ecuación 18.12 es independiente de suponer la masa gaseosa compuesta por una o varias clases de moléculas.

Si ahora suponemos que cada uno de los gases ocupa, por separado, el mismo volumen total V a la misma temperatura, la presión

en cada caso vendrá dada por p_i, llamada presión parcial, y según la ecuación 18.5 vale, si llamamos $v_i'^2$ al valor medio del cuadrado de las velocidades de las moléculas del gas i-ésimo,

$$p_i = \frac{1}{3V} N_i m_i v_i'^2 = \frac{2}{3V} N_i E_{mi} = \frac{N_i}{V} k T \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

y sumando todas las presiones parciales

$$p = \Sigma p_i = \frac{1}{V} k T \Sigma N_i$$

que es igual a la presión total expresada en la ecuación 18.13. Esto constituye la expresión analítica de la *ley de Dalton* que dice: *La presión en una mezcla de gases contenidos en un recinto es igual a la suma de las presiones a que estarían sometidos los gases componentes si cada uno ocupara por sí solo el volumen total del recinto.*

18.5 Difusión de los gases. De una manera empírica, GRAHAM encontró la ley que relaciona las velocidades con que distintos gases escapan de un recipiente con un tapón poroso. Vamos a encontrar la ley de Graham utilizando la teoría cinética. Supongamos dos gases 1 y 2 colocados en sendos recipientes del mismo volumen y se colocan en un recinto en donde se ha practicado el vacío. A cada recipiente se le hace un pequeño orificio de iguales dimensiones en ambos. El número de moléculas que llegan al orificio y pasan a través de él, escapando del recipiente, en un corto intervalo de tiempo dado, es directamente proporcional al número de moléculas contenidas en el recipiente y a la velocidad media de las mismas. Si llamamos N_1 al número de moléculas del gas 1 y N_2 al del 2, $\bar{v}_1$ a la velocidad media de las moléculas del 1 y $\bar{v}_2$ a la del 2, el cociente entre los números de moléculas que escapan de uno y otro recipiente en un intervalo de tiempo determinado será

$$\frac{\text{moléculas de 1}}{\text{moléculas de 2}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} \qquad (18.14)$$

Sabemos que si las temperaturas en los dos recipientes son iguales, también lo serán los valores medios de las energías cinéticas de traslación de las moléculas en ambos gases, luego

$$\tfrac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2 \qquad (18.15)$$

de donde

$$\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{v}_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

pero este cociente es el de los cuadrados de las velocidades cuadráticas medias y en la ecuación 18.14 figuran las velocidades medias. Sin embargo, el cociente entre ellas es prácticamente el mismo. Para algunas moléculas coincide el cociente entre las velocidades cuadráticas medias y el de las velocidades medias y en otras es algo diferente. Aceptaremos la igualdad y escribiremos

$$\frac{\text{moléculas de 1}}{\text{moléculas de 2}} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{\bar{v}_1^2}{\bar{v}_2^2}} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tag{18.16}$$

Si además de tener ambos recipientes la misma temperatura tienen también presiones iguales, sabemos por la ley de Avogadro que el número de moléculas en ambos ha de ser el mismo, es decir, $N_1 = N_2$ y el último miembro de la ecuación 18.16 se reduce a $\sqrt{m_2/m_1}$. Ahora bien, la relación entre las masas de las moléculas es la misma que la existente entre sus masas moleculares relativas M_1 y M_2, por lo que podemos escribir

$$\frac{\text{moléculas de 1}}{\text{moléculas de 2}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \tag{18.17}$$

que es la conocida ley de Graham: *Para gases a la misma presión y temperatura, las velocidades con que escapan por un orificio pequeño son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de las masas moleculares de dichos gases.* Si los gases son el hidrógeno y el oxígeno, la razón entre las velocidades es cuatro.

Supongamos ahora a los dos gases en una misma vasija. Sus temperaturas son iguales pero las presiones no. Tendremos que aplicar la ecuación 18.16 sustituyendo el cociente de m_2/m_1 por M_2/M_1. Las moléculas más ligeras se difunden más rápidamente que las otras. En el recipiente, al transcurrir el tiempo, la proporción de moléculas de masa mayor irá aumentando. Para aumentar la pureza del gas de mayor masa molecular contenido en el recipiente pueden utilizarse difusiones sucesivas. Con este método se logró separar isotopos del uranio durante la Segunda Guerra Mundial. Para ello debían estar en estado gaseoso, utilizándose el hexafluoruro de uranio compuesto por una mezcla de fluoruros de los dos isotopos del uranio.

18.6 Equipartición de la energía. Si admitimos que las moléculas de un gas ideal son esferas elásticas entre las cuales no actúan fuerzas de interacción salvo en los choques y que en éstos no se deforman, no habrá energía potencial interna y la energía interna de tales gases será solamente cinética. Considerando únicamente la energía cinética de traslación, hemos visto (ec. 18.12) que la energía cinética media por molécula es $E_m = \frac{3}{2} k T$, y si el número de moléculas del gas considerado es N, su energía interna será

$$U = \tfrac{3}{2} k T N \tag{18.18}$$

Si es n el número de moles, y recordando que el número de Avogadro es el número de moléculas por mol, $N = n N_a$, y como $R = k N_a$, la ecuación 18.18 se convierte en

$$U = \tfrac{3}{2} n R T \tag{18.19}$$

Esto nos indica que la energía interna de una masa determinada de gas ideal es directamente proporcional a su temperatura absoluta y es

independiente de las demás variables termodinámicas. Ésta es la ley de Joule (cfr. § 17.8).

La energía cinética media de traslación por molécula la podemos escribir en la forma

$$E_m = \tfrac{1}{2} m \bar{v}^2 = \tfrac{1}{2} m \bar{v}_x^2 + \tfrac{1}{2} m \bar{v}_y^2 + \tfrac{1}{2} m \bar{v}_z^2$$

Ésta puede cambiar al variar uno cualquiera de los tres parámetros $\bar{v}_x^2$, $\bar{v}_y^2$ o $\bar{v}_z^2$, y por ello se dice que las moléculas tienen tres *grados de libertad*. Ahora bien, como en estos movimientos desordenados no podemos considerar direcciones privilegiadas, las tres componentes de la velocidad cuadrática media deben tener el mismo valor (como ya se indicó anteriormente), con lo que la energía correspondiente a cada grado de libertad deberá ser la misma y por tanto igual a la tercera parte del valor total, o sea la energía correspondiente a cada grado de libertad debe ser

$$U_1 = \tfrac{1}{3} U = \tfrac{1}{2} n R T$$

y si consideramos un mol

$$U_1 = \tfrac{1}{2} R T$$

Ésta es la expresión, en este caso, de un principio más general enunciado por MAXWELL, llamado *principio de la equipartición de la energía*.

Hasta ahora hemos considerado movimientos de traslación. Esto puede ser correcto para moléculas monoatómicas. En moléculas pluriatómicas deberemos considerar que las energías no son solamente de traslación, pues pueden existir energías debidas a rotaciones, energías cinéticas de vibración y energías potenciales de dichas vibraciones, las cuales contendrán términos del tipo $\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2$, $\frac{1}{2} I \omega_x^2$, $\frac{1}{2} m v^2$ y $\frac{1}{2} k x^2$, respectivamente. Todos estos términos son proporcionales al cuadrado de cierta magnitud física. En Mecánica Estadística se demuestra que la energía total se distribuye por igual entre todos estos modos posibles e independientes en que las moléculas pueden absorber energía. Esto constituye el principio de la equipartición de la energía, antes citado, enunciado de una manera más general dado que cada modo posible de absorción corresponde a un grado de libertad. Dicho principio queda, pues, en la forma siguiente: *La energía total de un sistema gaseoso se reparte por igual entre los diferentes grados de libertad de sus moléculas*. Debemos advertir que la demostración que da la Mecánica Estadística se basa en que las moléculas cumplen con las leyes de la Mecánica newtoniana y no puede

aplicarse a fenómenos que para su explicación requieran consideraciones cuánticas.

18.7 Calores molares de los gases perfectos. El calor molar de un gas, a volumen constante, sabemos que vale (ec. 17.14)

$$C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{dU}{dT}\right)_v$$

y recordando el valor de U dado por la ecuación 18.19 hallamos

$$C_v = \tfrac{3}{2} R$$

pero el valor dado para U era considerando que sólo existía energía cinética de traslación, lo cual puede aceptarse en las moléculas monoatómicas. Dichas moléculas poseen tres grados de libertad y resultaba que la energía por cada grado de libertad era $\frac{1}{2} R T$ (por mol). Si las moléculas tienen l grados de libertad, como la energía ha de repartirse por igual entre éstos y considerando que a cada uno de ellos le corresponda en la traslación la energía hallada antes $\frac{1}{2} R T$, la energía total por mol será, en general, $U = (l/2) R T$, y el calor molar a volumen constante

$$\frac{dU}{dT} = \frac{l}{2} R \qquad (18.20)$$

En los gases diatómicos podemos considerar las moléculas constituidas por dos átomos unidos rígidamente constituyendo un cuerpo con simetría de revolución alrededor del eje determinado por los átomos. El movimiento más general de la molécula puede considerarse como una traslación y una rotación. A la primera corresponden tres grados de libertad, mientras que a la segunda sólo corresponden dos, ya que al descomponer la rotación según tres ejes ortogonales uno de los cuales sea el de simetría, a éste corresponde un momento de inercia (y por tanto una energía cinética de rotación) despreciable frente a los correspondientes a los otros dos ejes, con lo cual el número de grados de libertad de la molécula diatómica es de cinco, y según la ecuación 18.20

$$C_v = \frac{5}{2} R \qquad (18.21)$$

En los gases cuyas moléculas tengan más de dos átomos, el número de grados de libertad correspondientes a la rotación es tres y,

según hemos indicado antes, podrá haber más grados de libertad correspondientes a otros tipos de energía, con lo que resultaría, si es l el número total de grados de libertad de una molécula,

$$C_v = \frac{l}{2} R \tag{18.22}$$

Para hallar el calor molar a presión constante podemos aplicar la relación de Mayer (ec. 17.18) para los gases ideales

$$C_p = C_v + R = \frac{l}{2} R + R = \frac{l+2}{2} R \tag{18.23}$$

También tenemos que

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{l+2}{l} \tag{18.24}$$

Los valores deducidos concuerdan bastante bien con los determinados experimentalmente para distintos gases ideales, sobre todo para los monoatómicos. En otros la coincidencia no es perfecta y en algunos se obtiene una clara discrepancia. Ello se debe a no considerar la contribución a la energía interna debida a las vibraciones. Cuando se quiere tener en cuenta éstas, la teoría se complica, si bien su consideración puede ayudar al estudio de los enlaces y estructuras moleculares correspondientes.

De todo lo anterior deducimos que al comunicar una energía a una molécula monoatómica aumenta su energía de traslación y por tanto la temperatura del gas. Si la molécula es poliatómica y le comunicamos la misma cantidad de energía, ésta debe aumentar la energía de traslación, la de rotación y la de vibración, con lo cual el aumento de temperatura será inferior en los gases constituidos por tales moléculas que en los monoatómicos. Esto es lo que se deduce de la definición de calor molar y del hecho experimental observado de que en los gases monoatómicos es inferior al calor molar de los otros gases.

18.8 Recorrido libre medio. Sabemos que, entre dos choques consecutivos, una molécula recorre un camino recto a velocidad constante. A este camino se le llama recorrido libre y cambia de un choque a otro. Al valor medio de todos los recorridos libres se le da el nombre de *recorrido libre medio,* el cual depende del diámetro de

las moléculas y del número de ellas por unidad de volumen. Vamos a determinar su valor mediante razonamientos elementales.

Diremos que dos moléculas chocan cuando sus centros se aproximen hasta una distancia d llamada *diámetro molecular*, lo cual resulta evidente al considerar las moléculas como esferas de diámetro d (fig. 18.2 *a*). Para simplificar los cálculos podemos suponer una molécula móvil de diámetro $2\,d$ y las demás fijas y reducidas a puntos. Al cabo de un tiempo t la molécula habrá «barrido»

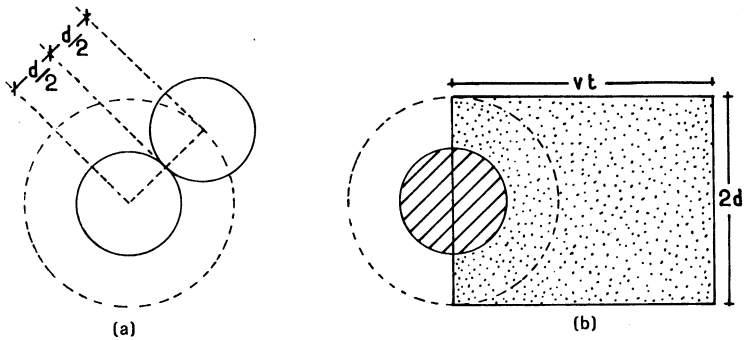


FIG. 18.2 *a*) Choque de dos moléculas. *b*) Cilindro barrido por una molécula en su movimiento.

en el espacio un volumen cilíndrico (fig. 18.2 *b*) cuya base es un círculo de diámetro $2\,d$ y de altura $v\,t$, en donde v es la celeridad media de la molécula (común a todas). El número de colisiones de la molécula con las que encuentra en su camino durante el tiempo t será igual al número de puntos representativos de las restantes moléculas contenidos en el volumen de aquel cilindro, que será igual al volumen del cilindro $\pi\,d^2\,v\,t$ por el número de moléculas en la unidad de volumen, N. El recorrido libre medio lo obtenemos dividiendo el camino $v\,t$ por el número de choques, o sea

$$L = \frac{v\,t}{\pi\,d^2\,v\,t\,N} = \frac{1}{\pi\,d^2\,N} \tag{18.25}$$

Este razonamiento es aproximado, ya que hemos supuesto una molécula móvil y las otras fijas y en realidad éstas también deben moverse. La velocidad que figura en el numerador es la velocidad media de la molécula respecto al recipiente, la del denominador es la velocidad media *relativa* de la molécula móvil respecto a las otras. Considerando la ley de Maxwell referente a la distribución de velocidades, la relación entre la velocidad que figura en el numerador y la del denominador vale $1/\sqrt{2}$, con lo que el valor del recorrido libre medio es

$$L = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,N\,d^2} \tag{18.26}$$

Para tener un orden de magnitud del recorrido libre medio, en un caso concreto, podemos considerar el aire en condiciones normales y tomar como

diámetro molecular $2{,}5 \times 10^{-10}$ m y así calculamos el valor de L, que resulta ser del orden de 10^{-7} m.

18.9 Fenómenos de transporte. En un gas en reposo a temperatura constante en cada punto no puede considerarse, aunque se muevan las moléculas, que haya transporte de energía o de cantidad de movimiento, ya que el movimiento en todas direcciones y sentidos hace que los valores medios de la energía sean los mismos en cada región del gas. Pero si establecemos, por ejemplo, una diferencia de temperatura, tendrá lugar un desplazamiento medio de moléculas con mayor energía que otras y existirá un transporte de energía. Vamos a aplicar estas ideas a la viscosidad y a la conducción de la energía calorífica en los gases.

a) **Viscosidad de los gases.** La viscosidad de los gases constituye una aplicación del transporte de cantidad de movimiento. Supongamos un gas que se mueve desplazándose laminarmente, de manera que todas las moléculas de un plano se mueven con la misma velocidad y paralelamente a un plano fijo que podemos tomar como plano x-y, siendo la velocidad diferente en los distintos planos y dependiente de z. La expresión de la fuerza de viscosidad (ec. 14.14) es en este caso

$$\frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dz} \tag{18.27}$$

en donde dF/dS es la fuerza de rozamiento interno entre dos láminas en contacto, por unidad de superficie, y dv/dz el gradiente de velocidad según el eje z. Basándonos en la teoría cinética, podemos explicar esta fuerza por el intercambio de moléculas de una lámina a la adyacente a través del plano de separación P (fig. 18.3).

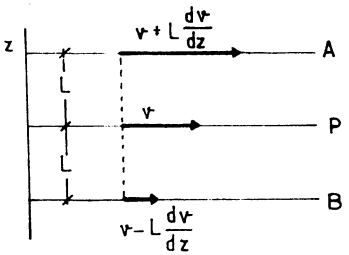


FIG. 18.3 Viscosidad de un gas.

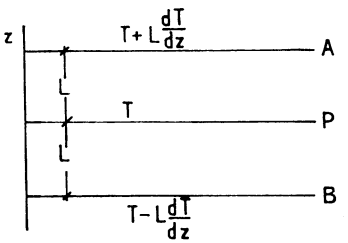


FIG. 18.4 Conducción del calor en los gases.

Sea N el número de moléculas por unidad de volumen. Como no pueden existir direcciones privilegiadas, podemos considerar al gas dividido en tres grupos iguales de moléculas animadas de movimientos paralelos a los tres ejes de coordenadas x-y-z. Pero teniendo en cuenta que en cada grupo habrá igual número que se muevan en un sentido que en el opuesto, resultarán seis grupos que corresponden, cada uno de ellos, a una dirección y sentido determinados, por lo que habrá $N/6$ moléculas en cada grupo. Vamos a considerar las moléculas que atraviesan, por unidad de superficie, el plano P procedentes del plano A situado a una distancia de P igual al recorrido libre medio L,

por lo que podremos considerar que dichas moléculas chocan al llegar a P con las moléculas existentes en este plano, habiendo chocado por última vez en el plano A. Así pues, la primera cesión de cantidad de movimiento la realizan en P. Si la velocidad de desplazamiento del plano P es v, la de A será $v + L\,(dv/dz)$ y la de B situado a la distancia L por debajo será $v - L\,(dv/dz)$.

La unidad de superficie del plano P estará atravesada por unidad de tiempo por $N\bar{v}/6$ moléculas descendentes que llevarán una cantidad de movimiento

$$\frac{N\bar{v}}{6} m \left(v + L\frac{dv}{dz} \right) \tag{18.28}$$

y por el mismo número de moléculas ascendentes con la cantidad de movimiento

$$\frac{N\bar{v}}{6} m \left(v - L\frac{dv}{dz} \right) \tag{18.29}$$

Restando las expresiones 18.28 y 18.29 tenemos la transferencia total resultante de cantidad de movimiento por unidad de tiempo y de superficie, es decir, la fuerza por unidad de superficie de P, que vale

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{3} N m \bar{v} L \frac{dv}{dz} \tag{18.30}$$

y comparando con la ecuación 18.27 resulta

$$\eta = \tfrac{1}{3} N m \bar{v} L = \tfrac{1}{3} \rho \bar{v} L \tag{18.31}$$

siendo $\rho = N m$ la densidad del gas. Como L es inversamente proporcional a la densidad, a una temperatura dada ($\bar{v}$ constante) el coeficiente de viscosidad del gas es independiente de la densidad y de la presión. Depende, pues, de la temperatura y como al crecer T crece $\bar{v}$, la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura, cosa que no ocurre en los líquidos.

b) Conducción de la energía calorífica en los gases. Consideremos en un gas dos planos muy próximos distantes dz y sea dT la diferencia de temperatura entre los puntos de los mismos. Recordando la ecuación 16.4 podemos escribir que la cantidad de calor transmitida en la unidad de tiempo y por unidad de superficie a través de dichos planos en la dirección z es

$$\frac{dQ}{dt} = -K\frac{dT}{dz} \tag{18.32}$$

Vamos a determinar el coeficiente de conductibilidad térmica K basándonos en la teoría cinética de los gases. Prescindamos de la convección y consideremos tres planos: el P equidistante de dos paralelos a él de los que está separado por una distancia igual al recorrido libre medio L, según se indica en la figura 18.4. Si la temperatura absoluta en los puntos del plano P es T, en el plano A es $T + L\,(dT/dz)$ y en el B es $T - L\,(dT/dz)$. Las moléculas por encima de P poseen energía cinética media superior a las que están por debajo. Las que atraviesan el plano P dan lugar a un transporte de energía cuyo valor medio resultante total origina un flujo de energía hacia la región de temperatura inferior, con lo que tenemos una conducción de energía. Razonando de

manera parecida a la empleada en la viscosidad, diremos que $N/6$ moléculas se mueven normalmente a P en un sentido y que por segundo y unidad de superficie $N\bar{v}/6$ lo cruzan hacia abajo transportando una energía cinética

$$E_m + L\frac{dE_m}{dz}$$

cada una de ellas, y que otras tantas lo cruzan en sentido opuesto transportanto cada una la energía cinética

$$E_m - L\frac{dE_m}{dz}$$

Pero en § 18.6 identificamos la energía interna del gas con la energía cinética de sus moléculas, y como la energía interna por mol es $U_1 = C_v T$, la energía media por molécula será $E_m = m\, c_v\, T$, donde m es la masa de una molécula y c_v el calor específico a volumen constante del gas.

El transporte de energía cinética resultante por segundo y unidad de superficie lo obtendremos restando la energía que cruza en un sentido de la que lo hace en el opuesto y será

$$\frac{N\bar{v}}{6}\left(-2L\frac{dE_m}{dz}\right) = -\frac{1}{3}N\bar{v}\,L\,m\,c_v\frac{dT}{dz} \qquad (18.33)$$

y esta energía es el calor que atraviesa P por segundo y unidad de superficie. Identificando, pues, las ecuaciones 18.33 y 18.32 tenemos

$$K = \tfrac{1}{3}N\,m\,\bar{v}\,c_v\,L = \tfrac{1}{3}\rho\,\bar{v}\,c_v\,L \qquad (18.34)$$

y comparando con la ecuación 18.31 podemos escribir

$$K = \eta\, c_v \qquad (18.35)$$

de la cual se deduce que, a cada temperatura, la conductibilidad térmica de un gas es independiente de la presión. Por medio de razonamientos menos elementales se llega a una ecuación análoga en la que aparece una constante a tal que

$$K = a\,\eta\, c_v \qquad (18.36)$$

donde el valor de a depende de si el gas es monoatómico, diatómico o triatómico.

18.10 Difusión mutua de dos gases. Según indicamos en § 17.18, colocando un gas en presencia de otro, a la misma presión y temperatura, al cabo de cierto tiempo se encuentra una mezcla homogénea sin que haya habido variación de aquellas variables de estado. Se dice que los gases se han difundido mutuamente y podemos interpretar el fenómeno mediante la teoría cinética considerando el transporte de masa de manera análoga a como se hizo para explicar la viscosidad como transporte de cantidad de movimiento o la conductibilidad calorífica como transporte de energía. Se demuestra que la velocidad de difusión en una dirección es directamente proporcional al gradiente de la densidad gaseosa en aquella dirección. A la constante de proporcionalidad se le llama *coeficiente de difusión mutua* y depende de las concentraciones,

recorridos libres medios y velocidades medias de cada gas. Si los valores de estas dos últimas magnitudes son poco diferentes y llamamos respectivamente L y $\bar{v}$ a sus valores comunes, el coeficiente de difusión mutua resulta valer

$$D = \frac{1}{3} L \bar{v} \tag{18.37}$$

Comparando con el coeficiente de viscosidad (ec. 18.31) vemos que

$$D = \frac{\eta}{\rho}$$

Es decir, es directamente proporcional al coeficiente de viscosidad e inversamente proporcional a la densidad del gas.

Los fenómenos de transporte acostumbran a ir asociados y así la conducción térmica queda modificada por la difusión. Si entre los gases que se difunden existe un gradiente de temperatura, al fenómeno de la difusión se le añade el de la conducción térmica. Si los dos gases constituyen una mezcla homogénea y establecemos un gradiente de temperatura se produce una *termodifusión* y el estado estacionario no se alcanza hasta que aparezca un gradiente de concentración relativa de un gas respecto al otro y la mezcla deja de ser homogénea. El fenómeno de la difusión térmica se ha utilizado para separar de una mezcla dos isotopos gaseosos que no puedan aislarse por otros métodos.

18.11 Entropía, desorden y probabilidad termodinámica. A cierto científico le preguntaron: «¿Puede definirse el calor en dos palabras?». A lo cual contestó: «El calor es *energía desordenada*». Si tomamos en cuenta esta definición de calor, para especificar dicha magnitud deberemos dar la medida de la energía y la del desorden. La energía ya sabemos que puede medirse y expresarse en calorías o en joule. Si queremos hablar de desorden en una definición, deberemos poder medirlo y para ello se usa la entropía. El calor es una magnitud que vendrá especificada por dos números: la cantidad del mismo y la entropía. El hecho de tomar la entropía como una medida del desorden es, en algunos casos, de gran utilidad. El conocimiento de la variación de entropía en un proceso proporciona frecuentemente información acerca de cambios estructurales que acompañan al mismo. Al fundir hielo, el aumento de entropía es de 5,2 cal/mol·°K, al vaporizarse agua a 100°C es de 35,5 cal/mol·°K. De todo ello se desprende que en la vaporización del agua el aumento del desorden es considerable, mientras que al fundirse hielo, el agua líquida a temperatura superior a la de fusión presenta todavía cierto orden.

La energía se transforma en calor cuando se desordena. Un cuerpo en movimiento de traslación posee energía cinética ordenada. Todas sus partículas se mueven ordenadamente. Si pierde energía por rozamiento, se transforma en calor y aumenta el movimiento desordenado de sus moléculas. Este desorden vendrá medido por el aumento de entropía.

Para relacionar cuantitativamente el desorden con la entropía se utiliza la Mecánica Estadística introduciendo el concepto de *probabilidad termodinámica* de un sistema en un estado dado.

Consideremos un volumen V donde tenemos un gas cuyo estado queda definido al conocer una variable de estado, tal como la presión, ya que nos han dado otra: el volumen. Conocer su estado macroscópico no presupone el

conocimiento de la posición y velocidad de cada una de las moléculas, puesto que un estado macroscópico dado puede realizarse de muchas maneras distintas, es decir, con distintos estados microscópicos. La posición de cada una de las moléculas, supuestas puntiformes, se determina por sus tres coordenadas y las correspondientes velocidades por sus tres componentes. De aquí resulta que el estado de cada molécula individual es función de 6 parámetros. Tomando un espacio de 6 dimensiones (espacio fásico), el estado de una molécula vendría representado por un punto. Si el número de moléculas es grande, el admitir el movimiento totalmente desordenado implica que los parámetros correspondientes a una molécula dada no dependan de los correspondientes a las otras. Si es N el número de moléculas en dicho volumen, el conjunto de los $6N$ valores mencionados nos define el estado microscópico del gas. El estado macroscópico dependerá de un número de parámetros menor, ya que depende de la energía cinética total y no de la dirección de la velocidad de cada molécula; y además, siendo iguales las moléculas, podemos permutar entre ellas las energías cinéticas y el estado macroscópico será el mismo. BOLTZMANN llamó *complexión* a una distribución en la cual cada molécula individual tiene una energía cinética determinada. Todas las complexiones son, por hipótesis, igualmente probables. Resulta claro que un estado macroscópico dado puede realizarse mediante un cierto número de complexiones y tendrá mayor probabilidad de producirse el que pueda realizarse con el mayor número de complexiones. Llamaremos *probabilidad termodinámica* W de un estado al número de complexiones que permiten realizarlo.

Es evidente que cuanto mayor sea el desorden mayor será la probabilidad termodinámica, pues si no existiese el desorden, o sea si cada molécula ocupase un punto del espacio fásico previamente asignado, la probabilidad sería muy pequeña, ya que las moléculas ocuparían unas posiciones y tendrían unas velocidades tales que su punto fásico correspondiente sería esencialmente fijo y sería muy poco probable que pudiesen ocupar otras posiciones. La probabilidad termodinámica resulta ser proporcional al desorden y *la entropía es función lineal del logaritmo neperiano de la probabilidad termodinámica* (principio de Boltzmann), lo cual, por consideraciones establecidas por BOLTZMANN y PLANCK, puede escribirse en la forma

$$S = k \ln W$$

en donde k es la constante de Boltzmann y a esta relación se le llama *ecuación de Boltzmann-Planck*.

Puede demostrarse que la ecuación de Boltzmann-Planck nos proporciona el mismo valor de la entropía que el que se obtiene por la definición termodinámica (ec. 17.39). No vamos a demostrarlo, pero podemos comprobarlo en un caso particular. Sea un gas perfecto que sufre una expansión en la que pasa del volumen V_0 al V_1. Debido al movimiento desordenado, no podemos conocer la posición de una molécula en un instante dado, pero la probabilidad de que se encuentre en determinado volumen V es proporcional a V. Así, si es W_1 la probabilidad termodinámica, o sea el número de maneras en que puede presentarse una molécula aislada en un volumen unidad, la probabilidad para un volumen V será $W_1 V$. Para N moléculas, el número de formas de presentarse será $(W_1 V)^N$, y aplicando la ecuación $S = k \ln W$,

$$S = k \ln (W_1 V)^N = k N \ln (W_1 V)$$

y la variación de entropía al pasar de V_0 a V_1 es

$$S_1 - S_0 = k\,N\,\ln\frac{W_1\,V_1}{W_1\,V_0} = k\,N\,\ln\frac{V_1}{V_0}$$

Si el sistema está constituido por un mol de gas, N es el número de Avogadro y $k\,N = R$, con lo cual

$$S_1 - S_0 = R\,\ln\frac{V_1}{V_0}$$

de acuerdo con lo visto en § 17.18.

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

Con el fin de que el lector fije las ideas adquiridas en el texto y sepa manejarlas, se proponen a continuación diversas cuestiones para ser analizadas y, a ser posible, discutidas entre varios lectores. Lo esencial es meditar y razonar sobre ellas, más que sacar las conclusiones a que hubiere lugar.

Para orientación de los lectores se da, en páginas posteriores, una solución muy escueta a algunas de las cuestiones. Dicha solución no debe considerarse más que como indicio de un resultado al que hay que llegar a través de un razonamiento prolijo basado en la teoría del texto.

CUESTIONARIO

1. ¿Es posible que la suma de dos vectores de módulos 2 y 5 sea 1?
2. Dos vectores vienen dados en función de sus componentes cartesianas rectangulares. ¿Cómo hallaremos el ángulo que forman? Ilustrar con un ejemplo.
3. ¿Qué haríamos para hallar un vector unitario normal al plano determinado por otros dos dados? Ilustrar con un ejemplo.
4. El doble producto vectorial $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$, ¿en qué casos puede tener la dirección de C?
5. El doble producto vectorial $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$ tiene la dirección de A, ¿qué puede decirse de las direcciones de los otros dos vectores?
6. ¿Puede hablarse de suma de vectores libres? ¿y de deslizantes? ¿y de fijos? Dar las distintas definiciones a que hubiere lugar.
7. Cuando un sistema de vectores deslizantes equivale a un vector único, ¿qué puede decirse del trinomio invariante?
8. La resultante general y el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto dado tienen igual dirección. ¿Qué condiciones deberá cumplir otro punto para que el momento resultante respecto de él sea mayor, igual o menor que el del punto dado?
9. ¿Cómo es la derivada de un vector de módulo constante?
10. La resultante general y el momento resultante respecto a un punto, de un sistema de vectores deslizantes son perpendiculares. ¿Qué puede decirse del momento mínimo de dicho sistema?
11. ¿Está definido el eje central de un par de vectores? ¿Y el de un sistema de vectores paralelos y de igual sentido?
12. Si al obtener el momento mínimo de un sistema de vectores deslizantes resulta un número negativo, ¿qué nos indica esto?
13. Demostrar que si el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a cada uno de los vértices de un triángulo es nulo, el sistema es equivalente a cero.
14. Dos sistemas de vectores deslizantes tienen los ejes centrales concurrentes. Hallar la condición para que el eje central del sistema equivalente a la adición de los dos sistemas concurra en el mismo punto.

15. ¿En qué caso un sistema de vectores paralelos no tiene definido su centro?
16. Expresar vectorialmente que un vector función del tiempo tiene dirección constante.
17. Demostrar que todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a dos, uno de los cuales pase por un punto arbitrariamente elegido.
18. Los ejes centrales de dos sistemas de vectores deslizantes se cortan ortogonalmente. Demostrar que el eje central del sistema equivalente a la adición de los dos sistemas dados se encuentra en un plano paralelo al determinado por los dos ejes dados.
19. En un campo conservativo, las superficies equipotenciales son esféricas y concéntricas. ¿Cómo serán las líneas de fuerza?
20. Demostrar que todo campo central es conservativo.
21. Razonar por qué las líneas de fuerza de un campo conservativo no pueden cerrarse sobre sí mismas.
22. ¿Cómo es la hodógrafa del movimiento de una piedra lanzada oblicuamente?
23. ¿Qué forma tiene la hodógrafa de un movimiento no rectilíneo? ¿Y si es rectilíneo no uniforme?
24. Un frenazo brusco de un tren hace caer una maleta colocada en el portaequipajes de un departamento. ¿Cómo la ve caer un viajero sentado en el departamento? ¿Y un observador en reposo en tierra?
25. ¿Por qué echando desde una torre dos piedras, con un intervalo de tiempo pequeño, su separación durante la caída no permanece constante?
26. ¿Qué clase de movimiento es el de un cuerpo cuya aceleración es perpendicular a la trayectoria y de módulo constante?
27. ¿Puede moverse un cuerpo con aceleración puramente normal y variable?
28. Si la distancia recorrida por un móvil varía en razón directa del tiempo, ¿qué se puede decir de la aceleración total?
29. Un bote navega por un río con la proa dirigida a la orilla opuesta. ¿Llegará antes si no hay corriente?
30. ¿En qué caso no está definido el eje instantáneo de rotación y deslizamiento?
31. Dentro de un autobús en marcha a lo largo de una carretera horizontal y rectilínea lanzamos sobre el suelo una bolita que lo cruza de un lado a otro. Observamos que su trayectoria es una línea recta respecto al autobús. Posteriormente, lanzamos otra vez la bola y vemos que la trayectoria es ahora una parábola cóncava hacia la parte delantera del autobús. Describir el movimiento del autobús en cada uno de los casos.
32. Tres luciérnagas X, Y, Z, están sobre una bicicleta que se mueve en la noche. X está en el centro justo de uno de los ejes de las ruedas. Y está en el cuadro de la bicicleta fuera de la circunferencia de la llanta. Z está en la llanta de la rueda. Resumir los movimientos: (*a*) de X e Y vistos por Z. (*b*) De Y y Z vistos por X. (*c*) De X y Z vistos por Y. (*d*) De las tres vistas por un observador fijo próximo a la bicicleta.

33. Un cuerpo rígido está en movimiento, y la velocidad de uno de sus puntos es perpendicular a ω, ¿qué puede decirse del movimiento?

34. Un sólido rígido se mueve con un punto fijo. Demostrar que el movimiento instantáneo se reduce a una rotación.

35. Con la mano extendida soportamos un peso de 5 kg. ¿Qué trabajo efectuamos? ¿ Y si nos desplazamos horizontalmente 100 m?

36. Una lámpara está suspendida del techo mediante una cuerda y un clavo. Representar todas las fuerzas de acción y de reacción.

37. De los extremos de una cuerda que pasa por una polea penden dos masas desiguales. ¿Cuál es y dónde está aplicada la reacción del peso de la mayor? ¿Y el de la menor?

38. Demostrar que para que tres fuerzas produzcan equilibrio, necesariamente han de ser concurrentes.

39. Sobre un grano de arena y sobre un buque actúan, a lo largo de 1 m, fuerzas resultantes de 1 dyna dirigidas en la dirección y sentido del movimiento. ¿Cuál de ambos cuerpos aumentará más su energía cinética?

40. ¿Qué velocidad debe tener un cuerpo en el ecuador para que su peso sea igual a la fuerza de Coriolis?

41. Si el Sol ejerce una fuerza de atracción sobre la Tierra, ¿por qué ésta no se precipita sobre aquél?

42. En el hemisferio norte, ¿hacia dónde tiende a desviar los cuerpos la aceleración de Coriolis?

43. Calcular a qué altura sobre la superficie terrestre la gravedad se reduce a la mitad.

44. Explicar en términos físicos por qué es peligroso bajar en marcha de un vehículo.

45. Si al aplicar una fuerza a un cuerpo aparece una reacción igual y de sentido contrario, ¿cómo es posible que lo ponga en movimiento?

46. Una vagoneta de 300 kg parte del reposo desde un punto de una vía que desciende recto por la ladera de una montaña y sube luego por otra. El punto de partida se halla a un nivel de 50 m sobre el valle y la vagoneta se detiene en la otra ladera a 40 m sobre el nivel de dicho valle. ¿Qué cantidad de calor se ha desprendido por rozamientos durante el viaje?

47. Un cuerpo pesa 100 kg al nivel del mar. ¿Cuál es su peso a una altura igual al radio terrestre? ¿Y su masa?

48. Sobre un barco y sobre un grano de arena actúan durante 1 s fuerzas resultantes de 1 dyna. ¿Cuál de los dos cuerpos aumenta más su cantidad de movimiento?

49. Si en dirección de un diámetro terrestre se hiciese un pozo hasta perforar la Tierra ¿cómo sería el movimiento de un cuerpo que cayese por este pozo sin velocidad inicial?

50. Si el radio de la Tierra es 6 400 km, ¿cuál es la aceleración centrípeta de un punto del ecuador?

51. ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre se ha de mover un satélite artificial para que se halle siempre sobre el mismo punto de la Tierra?

52. En un satélite artificial puesto en órbita, ¿cómo funcionaría un reloj de péndulo?

53. Dos hombres de igual masa están en una escalera mecánica en movimiento. Uno de ellos está quieto y el otro asciende andando con una velocidad constante. ¿Cuál de los dos ejerce mayor fuerza con los pies sobre la escalera?

54. Cuando una pelota realiza un choque elástico con el suelo, ¿cuánto vale la percusión a ella aplicada?

55. Cuando volteamos una piedra atada a una cuerda, ¿cuáles son las fuerzas de acción y de reacción?

56. Un ascensor se mueve con velocidad constante. ¿Cuándo ejerce más fuerza sobre los cables, al subir o al bajar?

57. Cuando un electrón da una vuelta alrededor de un átomo, ¿en cuánto aumenta su energía debido a la fuerza de atracción que hay entre ambos?

58. ¿De qué es unidad el kWh/s? ¿A qué equivale?

59. Enunciar, con todo rigor, el teorema de la cantidad de movimiento de la Dinámica del punto.

60. Un punto material describe una elipse con celeridad constante. ¿Qué dirección tendrá, en un instante cualquiera, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él?

61. ¿Qué energía mínima hay que comunicar a un satélite en órbita alrededor de la Tierra para que pueda alejarse indefinidamente?

62. Un proyectil que vuela, explota. ¿Varía (*a*) su cantidad de movimiento? (*b*) su momento cinético respecto al cdm? (*c*) su energía cinética?

63. Desde lo alto de un plano inclinado se sueltan dos cubos de igual tamaño, uno (*A*) hueco y otro (*B*) macizo y dos bolas de igual radio, una (*C*) hueca y otra (*D*) maciza. Los cuatro cuerpos tienen igual masa. La zona recorrida por los cubos está exenta de rozamientos y en la recorrida por las bolas existe un rozamiento suficiente para impedir el deslizamiento de éstas. ¿En qué orden llegarán los cuatro cuerpos a la base del plano si se sueltan simultáneamente? ¿Por qué? ¿Cuál de ellos alcanzará mayor cantidad de movimiento? ¿Y mayor energía?

64. Un sistema conserva su cantidad de movimiento. ¿Conserva necesariamente su energía mecánica? Ilustrarlo con un ejemplo.

65. En un sólido en movimiento el cdm se halla, en un instante dado, sobre el eje instantáneo de rotación y deslizamiento. ¿Será su velocidad mayor, igual o menor que la de los demás puntos de dicho eje?

66. Si un cuerpo rígido se lanza al aire sin girar, no gira durante su vuelo con tal que no intervenga la resistencia del aire. De lo anteriormente dicho, ¿puede afirmarse que el cdm coincide con el centro de gravedad?

67. Cuando dos cuerpos rígidos chocan, el momento cinético total de los dos cuerpos se conserva. ¿Significa esto que las fuerzas de contacto entre los cuerpos pasan por sus cdm?

68. Desde un mismo punto de un plano inclinado caen, sin perder energía por rozamiento, un cuerpo deslizando y una esfera rodando sin deslizar. ¿Cuál llegará antes a la base?

69. Un disco gira alrededor de un eje vertical con una celeridad ω. Sobre él cae verticalmente una gota de cera que queda adherida. ¿Qué teorema utilizaremos para hallar la celeridad final?

70. Una esfera gira libremente en torno a su eje a velocidad angular constante y bruscamente sufre una contracción térmica disminuyendo su diámetro. ¿Qué le ocurre a su velocidad angular?

71. El mdi de un sistema respecto a un eje dado es menor que el relativo a cualquier otro eje de igual dirección. ¿Qué puede decirse de dicho eje?

72. El campo de fuerzas de un par de protones es repulsivo. La energía potencial de este par, ¿crece o disminuye cuando los aproximamos hasta ponerlos en contacto?

73. ¿En qué principio físico se basa el hecho de que una bicicleta tiene mayor estabilidad cuando giran rápidamente sus ruedas que cuando no lo hacen?

74. Para aumentar la estabilidad de los cohetes se les pone una caña ¿Por qué?

75. Una varilla homogénea está suspendida de un eje normal a ella y que pasa a un tercio de su extremo. Hallar el radio de giro respecto a este eje.

76. Un hombre está en reposo en medio de un lago helado sobre una capa de hielo sin rozamiento. ¿Cómo conseguirá llegar a la orilla?

77. Después de la explosión de un proyectil en el aire, ¿qué puede decirse de su cantidad de movimiento? ¿y de su energía cinética?

78. ¿Cuándo coinciden el cdm y el centro de gravedad?

79. Un motor de 80 CV gira a 1400 rpm ¿Cuál es el par motor?

80. Al cargar una columna de un material cuyo coeficiente de Poisson es 0,4 el área de su sección aumenta en un 8 % ¿En qué tanto por ciento disminuirá su longitud?

81. Cuando se construye un martillo no se elige una longitud cualquiera para el mango. ¿Cuál debe ser ésta?

82. Una pelota cae desde una altura de 5 m. Si su coeficiente de percusión es 0,5 hallar el tiempo que tardará en pararse.

83. Se arroja una bola sobre una mesa de manera que resbale sin rodar con una celeridad v_0. Demostrar que rodará sin resbalar cuando su velocidad sea $(5/7)\ v_0$.

84. En el choque directo de dos cuerpos el coeficiente de percusión es cero. ¿Se pierde toda la energía cinética en el choque?

85. Un punto material está sometido a la acción de dos fuerzas que le ori-

ginarían sendos movimientos armónicos simples de igual dirección, período y amplitud, defasados 1/4 de período. ¿Cuál es la razón de la amplitud del movimiento resultante a la de uno de los componentes?

86. A un péndulo físico dado se le duplica la densidad. ¿Qué le pasa al período de las oscilaciones?

87. ¿En qué movimiento coincide el desplazamiento con la aceleración cambiada de signo?

88. ¿Qué habrá que hacer con la longitud de un péndulo simple para que no varíe su periodo al subir a una montaña?

89. ¿Qué ocurre en verano con el período de un reloj de péndulo calibrado en invierno?

90. ¿Qué le pasa al período de un reloj de péndulo cuando se introduce en un pozo profundo de una mina?

91. ¿Qué condición se ha de cumplir para que haya amortiguamento crítico?

92. Dos resortes diferentes suspenden cuerpos diferentes, siendo iguales los alargamientos de ambos. Hallar la razón de períodos cuando se hagan oscilar.

93. Concepto físico de impedancia mecánica.

94. ¿En qué consiste el fenómeno de las pulsaciones?

95. ¿Cómo sería, en función del tiempo, la energía mecánica de una oscilación amortiguada?

96. Explicar escuetamente cómo se producen ondas estacionarias.

97. En la propagación unidimensional de movimientos ondulatorios, ¿en qué condiciones se producen ondas estacionarias?

98. ¿En qué consiste el fenómeno de la resonancia?

99. Una onda plana pasa de un medio a otro diferente ¿Varía la amplitud? ¿Y la longitud de onda?

100. Se dispone de un columpio sin masa de 9,8 m de longitud. En él hay un niño considerado como punto material. ¿Con qué frecuencia lo hemos de empujar para que se produzca resonancia?

101. Dos ondas procedentes del mismo foco avanzan por medios diferentes ¿Cuál de ellas realiza mayor número de períodos por unidad de tiempo?

102. ¿A qué se debe el fenómeno de la reverberación y cuáles son sus efectos?

103. ¿Qué diferencia hay entre decibel y fon?

104. Sugerir un experimento de interferencias para demostrar que el sonido es un fenómeno ondulatorio ¿Cómo puede utilizarse este experimento para determinar la longitud de onda del sonido?

105. Tres altavoces iguales se instalan en el mismo local en lugar de un altavoz igual a los anteriores. ¿Cuál será la diferencia de sonoridad entre los dos casos?

106. Dos sonidos tienen intensidades de 1 y 100 $\mu W/cm^2$, respectivamente. ¿Cuántos db está un sonido por encima del otro?

107. Una habitación tiene un tiempo de reverberación de 1,0 s. Se levanta medio tabique del mismo material que las paredes, aumentándose así en un 20 % la superficie total sin variar sensiblemente el volumen. ¿Cuál será el nuevo tiempo de reverberación? Despréciense los efectos de puertas y ventanas, considerando como si todo fuera pared.

108. ¿Qué le ocurre al tiempo de reverberación de una sala de conciertos cuando el público se pone en pie para aplaudir?

109. Por una cuerda tensa de 50 cm de longitud se propagan ondas transversales a 150 m/s. ¿Cuáles serán las frecuencias de los tres primeros armónicos?

110. Dos sonidos de igual intensidad, ¿tienen igual número de fon?

111. Una locomotora se mueve hacia un observador haciendo sonar el silbato. ¿Cuándo será mayor la frecuencia percibida por el observador, cuando hay viento a favor o en contra del movimiento?

112. Una habitación de forma cúbica tiene un tiempo de reverberación de 1 s. Hallar el tiempo de reverberación de otra ortoédrica de igual volumen y cuyas aristas están entre sí en la relación 1:2:4. Se supone igual el coeficiente de absorción.

113. Una cuerda tensa emite un cierto sistema de sonidos. Se duplica su tensión. ¿En cuánto afectará esto a la frecuencia del armónico fundamental?

114. Un tubo sonoro cerrado por un extremo tiene una longitud mitad que otro abierto por los dos extremos. ¿En qué se diferencian los sonidos emitidos por ambos tubos?

115. ¿Qué condiciones debería cumplir un fluido para que fuera igual la presión en todos sus puntos?

116. Un tubo flota verticalmente en el agua si lo lastramos con un poco de mercurio. ¿Por qué? Si le quitamos el mercurio, ¿qué ocurre?

117. ¿Varía con la altura la fuerza ascensional de un globo?

118. En un platillo de una balanza equilibrada tenemos un recipiente con agua. Introducimos un objeto suspendido de un hilo sin tocar el fondo. La balanza se desequilibra y para equilibrarla de nuevo colocamos pesas en el otro platillo. ¿A qué equivale el valor de las pesas? ¿Podría tener alguna utilidad este experimento?

119. Queremos construir un barómetro utilizando aceite. ¿Qué deberíamos hacer? ¿Tendría más sensibilidad este barómetro que el de mercurio?

120. ¿Qué ocurre si inclinamos un barómetro de Torricelli?

121. ¿Puede ser cualquiera la sección de un barómetro?

122. Si variase la densidad media de la Tierra, ¿variaría la presión atmosférica?

123. Hinchando un neumático de bicicleta con una bomba, ¿realizamos una fuerza constante sobre el émbolo?

124. Determinados insectos acuáticos se desplazan sobre la superficie del agua apoyando en ella sus patas. Describir, en términos físicos, cómo se produce este apoyo.

125. Un tubo capilar tiene su extremo inferior sumergido en agua. El ascenso capilar dado por la ley de Jurin es mayor que la longitud del tubo. Si el agua saliera por la parte superior de éste, caería de nuevo al recipiente pudiendo realizar trabajo en la caída, con lo que se vulneraría el Principio de Conservación de la Energía. ¿Por qué no ocurre esto?

126. ¿Cómo contribuye la tensión superficial a la formación de las olas?

127. Explíquese por qué fluye el agua en forma continua por una tubería vertical, mientras que se divide en gotas al caer libremente.

128. Definir la unidad giorgi del coeficiente de viscosidad y hallar su equivalencia en poises.

129. Una manguera de riego conduce agua a gran velocidad. Si la manguera presenta una zona de menor resistencia que el resto, discutir qué le ocurrirá a dicha zona.

130. ¿Pueden cortarse dos líneas de corriente?

131. La cortina de plástico de la ducha se desplaza hacia ésta cuando sale en forma de lluvia fina e intensa pero no si, aun teniendo el mismo caudal, sale en forma de chorro. Explicar el fenómeno.

132. ¿Por qué no es posible la existencia de hombres semejantes geométricamente a nosotros pero cuya estatura sea de 10 m?

133. ¿Cuándo son semejantes cinemáticamente dos sistemas?

134. ¿Cuándo convendrá utilizar el número de Froude? ¿Y el de Weber? ¿Y el de Reynolds?

135. ¿Qué grupo adimensional se utilizará cuando intervengan de manera esencial fuerzas de inercia y fuerzas elásticas?

136. ¿Cuánto vale, en el sistema giorgi, el calor específico del agua líquida?

137. La masa del aire contenido en una habitación, a igualdad de presión, ¿es la misma en verano que en invierno?

138. Dos gases tienen distinta masa molecular. Estando a la misma presión y temperatura, ¿cuál de los dos tiene mayor densidad?

139. Comunicando la misma cantidad de calor a una masa de hierro y a otra igual de aluminio, ¿en cuál es mayor la elevación de temperatura?

140. ¿A qué se llama valor en agua de un calorímetro?

141. ¿Cómo podemos determinar la temperatura de un sólido?

142. Para determinar el valor en agua de un calorímetro, ¿es indistinto que el agua agregada esté más caliente o más fría que la contenida?

143. Citar ejemplos de métodos empleados en la práctica para favorecer la evaporación de un líquido.

144. Citar ejemplos en los que se ponga de manifiesto las diferencias fundamentales entre la vaporización, la ebullición y la evaporación.

145. En una vasija cerrada tenemos una mezcla de vapores distintos. Razónese un proceso sencillo para separar dichos vapores, si es que es posible.

146. ¿Podemos determinar la presión atmosférica midiendo la temperatura de ebullición del agua destilada?

147. ¿Cómo podemos separar dos líquidos de distinto punto de ebullición?

148. ¿Por qué se empañan los cristales de las ventanas en invierno y no en verano?

149. ¿Varía con la temperatura la humedad absoluta? ¿Y la humedad relativa?

150. Si nos mojamos la mano con un líquido volátil notamos sensación de frío. ¿Por qué?

151. Para enfriar una bebida echamos un cubito de hielo en el vaso. ¿Por qué?

152. Para calentar el coñac de una copa se hace pasar por su interior un chorro de vapor de agua. ¿Rebaja sensiblemente esto la graduación alcohólica? Hágase un cálculo aproximado.

153. ¿En qué condiciones observaríamos la sublimación del hielo?

154. En un calorímetro adiabático se mezcla hielo con agua caliente ¿Qué le ocurre a la entropía del hielo? ¿Y a la del agua? ¿Y a la del sistema total?

155. ¿Se realiza trabajo cuando se sublima una bola de alcanfor?

156. ¿Puede disminuir la entropía de un sistema que realiza un trabajo de expansión, si aumenta constantemente la energía interna? ¿Y si disminuye?

157. ¿Es función de estado la entalpía? ¿Por qué?

158. ¿Qué puede decirse de un sistema que disminuye de entropía durante una transformación?

159. ¿Qué forma tendría un ciclo de Carnot en un diagrama T-S?

160. ¿Qué le ocurre a la energía interna de un sistema que sufre una expansión adiabática?

161. Un gas perfecto se expansiona adiabáticamente sin variar su entalpía ¿Qué puede decirse de su presión?

162. ¿Cuándo disminuirá la energía interna de un sistema aislado? ¿Y si no está aislado?

163. ¿Qué mide el área de un ciclo de Carnot en el diagrama p-V? ¿Y en el T-S?

164. En un gas perfecto, ¿en qué transformaciones coinciden la variación de entalpía y la de energía interna?

165. Supongamos que se dispone de un foco frío cuya temperatura sea el cero absoluto. Una máquina de Carnot toma calor de otra fuente térmica a temperatura $T \neq 0$ K. ¿Qué fracción de este calor se cede al foco frío? ¿Qué se deduce de ello si, así y todo, se admite la validez del segundo principio de la Termodinámica?

166. Un gas perfecto se dilata por vía reversible, primero isotérmicamente y luego adiabáticamente. ¿Puede calcularse el trabajo total realizado entre

los estados inicial y final si se conocen éstos? ¿Y el realizado en la expansión adiabática si conocemos las temperaturas extremas pero no los volúmenes inicial y final?

167. ¿De qué signo es el trabajo que realiza el hielo en la fusión?

168. Considerando el aire como gas perfecto, interprétese el hecho de que al inflar a mano un neumático, se caliente la bomba.

169. En un ciclo de Carnot, ¿en qué isoterma se producirá mayor variación de entropía del sistema?

170. Dos de las siguientes aseveraciones son falsas y la otra incompleta. La entropía permanece constante en toda transformación: (*a*) isotérmica; (*b*) adiabática; (*c*) a volumen constante. Completar la que proceda de manera que sea totalmente cierta.

171. Un bañista se lanza a una piscina. El valor absoluto de la entropía ganada por la piscina, ¿será mayor, igual o menor que la perdida por el bañista?

172. ¿Puede dilatarse un sistema y realizar un trabajo nulo?

173. ¿En qué procesos coincide el calor absorbido o cedido por un sistema con la variación de su entalpía?

174. Un ciclo tiene la forma de rectángulo en el diagrama *p-V*. Represéntese en el diagrama *p-T* y en el *T-V*.

175. En una habitación cerrada y aislada térmicamente del exterior se deja una nevera eléctrica funcionando y con la puerta abierta. Si la nevera está graduada para enfriar hasta 0°C, decir y razonar cuál será la temperatura final de la habitación.

176. Cuando nos frotamos las manos para calentarlas, ¿de qué principio hacemos uso?

177. Un sistema recorre un ciclo una de cuyas partes es irreversible. El incremento de entropía que sufre el sistema, ¿será positivo, negativo o nulo?

178. Se lleva calor del interior frío de una nevera eléctrica al ambiente exterior más caliente. Demostrar que esto no constituye una violación del segundo principio de la Termodinámica.

179. ¿En qué se emplea el calor que se da al agua al vaporizarla?

180. Desplazando el émbolo, se comprime adiabáticamente un gas encerrado en un cuerpo de bomba. Explicar, por razonamientos cinéticos, qué le ocurre a la presión.

181. ¿Quién varía más de entropía, 1 g de agua que se funde a 0°C y 1 atmósfera, o 1 g de agua que se vaporiza a 100°C y 1 atmósfera? (Calor de fusión = 80 cal/g; calor de vaporización = 540 cal/g).

182. Enunciar el principio de equipartición de la energía.

183. Para el éter, $C_p/C_v = 1{,}08$. ¿Cuantos grados de libertad tiene la molécula de éter?

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

1. No. $2 < 5 - 1$ y los tres vectores no pueden formar un triángulo.
3. $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}/(AB \text{ sen } \varphi)$.
5. C es perpendicular a A; B no es perpendicular a C.
7. Que es nulo.
9. Perpendicular a él o nula.
11. No. Sí, pasa por el centro de vectores paralelos.
15. Cuando su resultante general es nula.
19. Rectas concurrentes en el centro común.
21. Porque la circulación a lo largo de una de ellas no sería nula.
23. Cualquiera. Rectilínea.
25. Porque, en cada instante, existe una diferencia de velocidades.
27. Sí.
29. No.
31. Rectilíneo y uniforme. Frena con aceleración constante.
33. Es una rotación.
35. 0.
37. La reacción de un peso siempre está aplicada a la Tierra.
39. Los dos igual.
41. Variaría la energía mecánica y el sistema no sería conservativo.
43. $h = R(\sqrt{2} - 1)$.
45. Acción y reacción están aplicadas en cuerpos distintos.
47. 25 kg; 100 kg.
49. Oscilatorio.
51. 36000 km.
53. Los dos igual.
55. Centrípeta aplicada a la piedra por la cuerda y tensión de ésta aplicada por la piedra.
57. 0.
61. Igual y opuesta a la energía mecánica que posee (energía potencial nula en el infinito).
63. *A* y *B* juntos, después *D* y por último *C*.
65. Igual.
67. No.
69. Conservación del momento cinético.
71. Que pasa por el cdm.
73. Teorema del momento cinético.
75. $l/3$.
77. Se conserva. Aumenta.
79. 41 m.kp.
81. La que haga que el centro de percusión se halle en el centro de la cabeza del martillo.
85. $\sqrt{2}:1$.
87. M.a.s. de $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$.

89. Aumenta.
91. $R = 2\sqrt{km}$.
95. Decreciente y tiende asintóticamente a cero.
97. Cuando interfieren dos ondas de igual amplitud que se propagan en sentidos opuestos.
99. Sí. Sí.
101. Las dos igual.
105. 4,77 db.
107. 0,8 s.
109. 150 Hz, 300 Hz, 450 Hz.
111. A favor.
113. La multiplica por $\sqrt{2}$.
115. Estar en reposo y ser despreciable su densidad.
117. Sí.
119. Sí.
121. Sí.
123. No.
129. Se estrecha.
135. El número de Cauchy.
137. No.
139. En el hierro.
141. Por calorimetría.
149. No. Sí.
151. Para robar el calor de fusión.
153. A presiones inferiores a 4,6 tor (punto triple).
155. Sí.
157. Sí. Es suma de funciones de estado.
159. Rectangular.
161. No varía.
163. Trabajo realizado en un ciclo = Calor total absorbido. Calor total absorbido en un ciclo = Trabajo realizado.
165. La inaccesibilidad del cero absoluto.
167. Negativo.
169. En las dos igual.
171. Mayor.
173. Isobáricos.
177. Nulo.
179. En aumentar la energía cinética de las moléculas.
181. Vaporizada.
183. 25.

Damos a continuación una colección de problemas que han sido propuestos en diversas pruebas celebradas en las Escuelas Técnicas Superiores de Arquitectura de Barcelona y Madrid y en las de Ingenieros Industriales de Barcelona y Tarrasa. El orden en que figuran sigue sólo aproximadamente el de las materias en el libro, pues en muchos de dichos problemas intervienen varios temas, lo que hace difícil su colocación exacta. Esperemos que esta colección ayude al estudiante a afirmar sus conocimientos de Física.

PROBLEMAS

1. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son;

$$A(4,\ 0,\ 1),\ B(0,\ 8,\ 0),\ C(1,\ 1,\ 5).$$

Determinar, por método vectorial, el área S y los ángulos de tal triángulo.

Resp. $S = 21{,}55$; $A = 69° 35' 57''$; $B = 33° 29' 27''$; $C = 76° 54' 40''$

2. Dados dos vectores **A** y **B**, hallar un vector **V** perpendicular a **B** que sea coplanario con **A** y **B**.

Resp. $\mathbf{V} = k(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}$. $k =$ constante

3. Hallar el valor de la expresión $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$.

Resp. $A^2 B^2$

4. Determinar el lugar geométrico del extremo $P(x, y, z)$ de un vector P-O concurrente con otro fijo A-O, en donde $A(2, 0, 0)$, si el módulo del producto vectorial es constante e igual a 2.

Resp. $z^2 + y^2 = 1$

5. Expresar vectorialmente que el vector $A(t)$ tiene dirección constante.

Resp. $d\mathbf{A}/dt = \lambda\, \mathbf{A}$ ($\lambda =$ constante)

6. Expresar vectorialmente que el vector $A(t)$ tiene módulo constante.

Resp. $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A}/dt = 0$

7. Tenemos tres vectores deslizantes de componentes (3, 0, 4), (1, 0, 1) y (0, 0, −1), cuyas rectas soporte pasan, respectivamente, por los puntos (1, 1, 1), (0, 0, 0) y (1, 0, 1). Determinar el más sencillo de los sistemas equivalentes al dado.

Resp. Vector **R**(4, 0, 4) que pasa por el punto (0, 7/8, 0) más un par que forme torsor de flecha 0,125.

8. Reducir al sistema equivalente más sencillo el sistema de vectores deslizantes definidos por los siguientes orígenes y extremos:

Orígenes	Extremos
(1, 0, 1)	(0, 0, 1)
(2, 0, 0)	(0, 1/2, 0)
(0, −1, −1)	(0, 0, 0)

Resp. Vector R(−3, 3/2, 1) que pasa por el punto (10/49, 12/49, 12/49) más un par que forme torsor de flecha 2/49.

9. Dado el vector $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, hallar las dos primeras derivadas respecto a t en el punto (1, 1, 1) y descomponer el vector segunda derivada en dos

componentes perpendiculares entre sí, una de las cuales esté en la dirección de la primera derivada.

Resp. $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(111)} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{(111)} = 2\mathbf{i}$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{8}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{2}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

10. Dados los vectores cuyos orígenes respectivos son los puntos de coordenadas (0, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 1) y sus extremos respectivos son los puntos (2. 2, 2), (2, 0, 1) y (0, 0, 2), determinar el eje central y el momento mínimo del sistema de vectores deslizantes asociado.

Resp. Pasa por (6/11; 18/11; 6/11)

y es paralelo a $\mathbf{R}(3, -2, 3)$; $M_m = 0$

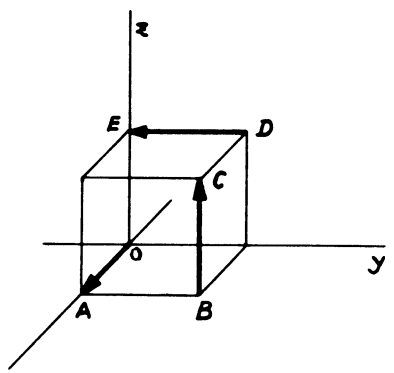
11. Un sistema de vectores deslizantes está definido por cuatro vectores cuyos orígenes son los puntos de coordenadas (0, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 1) y (1, 3, 1). Sus extremos respectivos son los puntos (1, 1, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 2) y (0, 3, 1). Determinar la resultante general, el momento mínimo y el momento respecto al punto de coordenadas (2, 0, 2).

Resp. $\mathbf{R}(2, 1, 0)$; $M_m = 4/\sqrt{5}$; $\mathbf{M}' = -4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

12. La resultante general y el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto dado tienen igual dirección. ¿Qué condiciones deberá cumplir otro punto para que el momento resultante respecto a él sea mayor ,igual o menor que el correspondiente al punto dado?

Resp. Igual: Todo punto de la recta que pase por el punto citado y cuya dirección sea la de **R**.
Mayor: Cualquier punto del espacio (excluida dicha recta).
Menor: No lo será en ningún punto.

13. Tres vectores deslizantes forman los lados *OA*, *BC* y *DE*, que se cruzan, de un cubo de arista unidad. Determinar la resultante general, el momento mínimo y el eje central del sistema de vectores. ¿Se puede reducir el sistema a un vector que pase por el origen y a otro vector?



Resp. $\mathbf{R} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $M_m = \sqrt{3}$; eje central pasa por el punto (1/3, 2/3, 1/3) y es paralelo a $\mathbf{R}$; puede reducirse, p. ej., al vector $\mathbf{A}(0, 0, 1)$ que pase por el punto $P(1, 2, 0)$ y al $\mathbf{B}(1, -1, 0)$ que pase por el origen.

14. Hallar el vector o vectores unitarios $\mathbf{u}$ que formando un ángulo de 45° con el vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, dé un producto vectorial $\mathbf{A} \wedge \mathbf{u}$ que esté contenido en el plano Oxy.

Resp. $$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

15. Hallar la circulación del vector $\mathbf{A} = (2t - 1)\,\mathbf{i} + (t^2 + 1)\,\mathbf{j} + 2t^2\,\mathbf{k}$ a lo largo de la curva $x = t^2 - 4$, $y = 2t^2 - 1$, $z = t - 1$, entre los puntos de la misma definidos por los valores $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

Resp. $C = 4$

16. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{A} = (x^2 + y - 2z)\,\mathbf{i} + 3z\,\mathbf{j} + (x - y)\,\mathbf{k}$ a través de la superficie plana rectangular definida por los puntos $O(0, 0, 0)$; $A(a, 0, 0)$; $B(0, 0, b)$ y $C\ (a, 0, b)$.

Resp. $$\Phi = \frac{3}{2}ab^2$$

17. Hallar el flujo del vector $\mathbf{A} = 2\mathbf{k}$ a través de la superficie lateral del cono recto que se apoya sobre el plano Oxy, cuyo eje es Oz, siendo R el radio de la base y h la altura. *a*) Se excluye en el cálculo la superficie de la base. *b*) ¿Cuál será el flujo a través del cono, considerando también la base?

Resp. *a*) $\Phi = 2\pi R^2$; *b*) nulo

18. Dado el campo escalar $U = x^2 + y^2 - 2xz - 1$, determinar la ecuación de la superficie equiescalar que pasa por el punto $P(3, -1, 2)$.

Resp. $x^2 + y^2 - 2xz + 2 = 0$

19. Una partícula recorre una trayectoria rectilínea de manera que en cada instante su aceleración valga $a = 3\sqrt{v + 1}$, siendo v la celeridad instantánea. Si en el instante $t = 1$ s el espacio recorrido es $x = 1$ m y su celeridad $v = 3$ m/s, determinar el espacio, la celeridad y la aceleración para el instante $t = 3$ s.

Resp. $x = 25$ m, $v = 24$ m/s, $a = 15$ m/s^2

20. Desde una torre de 40 m de altura se lanza una piedra en una dirección que forma un ángulo de 60° con la horizontal. Sabiendo que la piedra cae a 50 m de la base de la torre sobre un suelo horizontal, determinar: *a*) la celeridad incial; *b*) la velocidad al llegar al suelo y *c*) el tiempo empleado en el movimiento.

Resp. *a*) $v_0 = 19{,}67$ m/s; *b*) $v_x = 9{,}83$ m/s, $v_y = 32{,}77$ m/s
c) $t = 5{,}08$ s.

21. Las componentes de la aceleración de un punto son $\ddot{x} = -a$, $\ddot{y} = a$, $\ddot{z} = 0$, siendo $a > 0$. La velocidad inicial tiene la dirección y sentido del semieje positivo Ox, siendo la posición en dicho instante la del origen de coorde-

nadas. Determinar el instante en el cual es mínima la celeridad, así como el valor de ésta.

Resp. $t = \dfrac{v_0}{2a}$ $\qquad v_m = \dfrac{v_0\sqrt{2}}{2}$

22. La corriente de un canal de anchura a tiene una velocidad paralela a las orillas cuyo módulo viene dado por la ecuación $v = mx^2 + nx + p$ (m, n y p constantes), siendo x la distancia a una orilla. Sabemos que para $x = a/2$ la celeridad es máxima y vale V y que en las dos orillas es nula. *a*) Determinar las constantes m, n y p y expresar la ecuación de la celeridad. *b*) Un punto material parte de una orilla perpendicularmente a ella con celeridad u. ¿Cuánto tarda en atravesar el canal? *c*) Al llegar a la otra orilla, ¿cuál ha sido el desplazamiento debido a la corriente?

Resp. a) $4Vx/a\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$; *b)* $t = a/u$; *c)* $d = 2Va/3u$

23. Un submarino en reposo, cuyo periscopio emerge del agua, localiza una embarcación enemiga a 200 m, que se halla parada. Al percatarse ésta del peligro, inicia su marcha en dirección perpendicular a la recta que une las posiciones iniciales de ambas naves con una aceleración constante de 0,25 m/s^2. Si el submarino permanece en su posición observando al objetivo, determinar, al cabo de 40 s de comenzar la escapada, *a*) el ángulo girado por el periscopio. *b*) La celeridad angular. *c*) El instante en que ésta deja de aumentar.

Resp. *a)* 45°; *b)* $\dfrac{1}{40}$ rad/s; $t = 40/\sqrt{3}$ s

24. Desde el punto más alto de un plano inclinado de longitud l y altura h dejamos caer, a lo largo de dicho plano, un punto material que parte del reposo. Simultáneamente y desde el punto más bajo lanzamos otro punto a lo largo del plano y hacia arriba con celeridad inicial u. Suponiendo el plano liso, hallar dónde se encuentran ambos puntos.

Resp. $x = glh/2u^2$ a partir del punto más alto

25. Un cuerpo se abandona en el campo de la gravedad muy cerca del suelo (para que g sea constante) desde una altura h. Otro se lanza desde la altura h' con velocidad inicial v_0 dirigida hacia el suelo. Determinar qué valor ha de tener v_0 para que lleguen al suelo simultáneamente.

Resp. $v_0 = g(h' - h)/(2gh)^{1/2}$

26. Un punto material se mueve en el plano Oxy con una velocidad cuyas componentes cartesianas son $v_x = ct^2$, $v_y = bt$. Determinar la trayectoria y las componentes tangenciales y normal de la aceleración, sabiendo que inicialmente se encuentra en el origen de coordenadas.

Resp. $x^2 = 8c^2y^3/9b^3$; $a_t = \dfrac{2c^2t^2 + b^2}{\sqrt{c^2t^2 + b^2}}$; $a_n = \dfrac{bct}{\sqrt{c^2t^2 + b^2}}$

27. Un punto cuya posición inicial es $x = 0$, $y = b$ y que tiene por velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ paralela al eje Ox y dirigida en el sentido positivo, está sometida a una aceleración paralela al eje Oy dirigida en el sentido negativo, siendo $a_y = -k^2y$. Hallar: *a*) La ecuación de la trayectoria. *b*) La hodógrafa del

movimiento. *c*) El tiempo transcurrido desde el instante inicial hasta que el móvil corta al eje Ox.

Resp. *a*) $y = b \cos(kx/v_0)$; *b*) Recta paralela a Oy a la distancia v_0 del origen; *c*) $t = \pi/2k$.

28. El movimiento de un sólido rígido viene definido por la rotación resultante $\boldsymbol{\omega}(3, -1, 2)$ y la velocidad de uno de sus puntos P, $\mathbf{v}_P(2, -3, 1)$. Determinar: *a*) El eje instantáneo de rotación y deslizamiento. *b*) La velocidad de un punto cualquiera de dicho eje.

Resp. *a*) Pasa por el punto $(5/14;\ 1/14;\ -1/2)$ y es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. *b*) $v = 2{,}94$.

29. El movimiento de un sólido queda definido, en un instante dado, por las rotaciones simultáneas siguientes: $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}_3 = 2\mathbf{k}$ que pasan, respectivamente, por los puntos $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(1, -1, 0)$, $O(0, 0, 0)$. Se pide: *a*) Velocidades de los puntos del sólido $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ en el instante considerado. *b*) Reducir el movimiento al punto A, describiendo los movimientos elementales correspondientes. *c*) Determinar el movimiento helicoidal tangente, hallando el eje instantáneo de rotación y deslizamiento y la velocidad de deslizamiento.

Resp. *a*) $\mathbf{v}_A = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{v}_B = -4\mathbf{i} + \mathbf{k}$; *b*) traslación instantánea de velocidad $\mathbf{v}_A$ más rotación $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3$;

c) eje instantáneo $x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}$; $v_d = -\sqrt{6}/3$.

30. En un instante dado, la velocidad de un punto $P(2, 1, 0)$ de un sólido vale $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ y la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Se pide: *a*) Demostrar que el movimiento instantáneo del sólido se reduce a una rotación. *b*) Determinar la ecuación del eje de rotación.

Resp. $v_d = \dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}}{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$; *b*) $y = 0$, $x + z - 2 = 0$

31. Un círculo de radio $R = 30$ cm rueda sin deslizar sobre una recta horizontal de manera que su centro se desplaza con celeridad $v_0 = 3$ m/s. Tomando como centro de reducción del movimiento el punto A de la periferia que en el instante considerado se encuentra retrasado 90° respecto al de tangencia, determinar los movimientos de rotación y traslación en que puede descomponerse el movimiento mencionado.

Resp. $\omega = 10$ rad/s alrededor de A más una traslación de velocidad dirigida a 45° hacia la recta de rodadura y celeridad $3\sqrt{2}$ m/s.

32. En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, el movimiento de un sólido es tal que el eje Oz es de rotación y deslizamiento para un cierto instante, de velocidades dirigidas en el sentido positivo del eje y valores respectivos $\omega = 2$ rad/s y $v = 6$ m/s. Se introduce una velocidad de traslación de celeridad $v_1 = 4$ m/s, paralela al plano Oxz y que forme un ángulo de 60° con el sentido positivo del eje Ox. Determinar el nuevo movimiento y para el instante considerado: *a*) El eje instantáneo de rotación y deslizamiento. *b*) La celeridad de deslizamiento.

Resp. *a*) $x = 0$, $y = 1$. *b*) $v_d = 9{,}46$ m/s

33. Una varilla de longitud d se mueve en un plano de manera que sus extremos se hallen sobre dos rectas perpendiculares. Hallar la ruleta y la base.

Resp. Base: $x^2 + y^2 = d^2$ (tomando las dos rectas como ejes coordenados). Ruleta: Circunferencia de diámetro d y centro el punto medio de la varilla.

34. Un electrón atraviesa una región donde se le acelera uniformemente. Sabiendo que entra con una celeridad $v_0 = 1000$ m/s y sale con una velocidad de 10 000 m/s que forma 30° con la dirección de la velocidad inicial; y que tarda 0,01 s en recorrer dicho camino, determinar la aceleración.

Resp. $a = 9{,}15 \cdot 10^5$ m/s^2 formando un ángulo de 33° 8′ con la dirección de la velocidad inicial.

35. Un automóvil en reposo arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2. En el instante de arrancar le pasa un camión que lleva una velocidad constante de 36 km/h. Suponiendo ambos móviles como puntos materiales, determinar: *a*) dónde lo alcanza, *b*) cuánto tarda, *c*) la velocidad del coche en dicho instante.

Resp. *a*) a los 100 m; *b*) 10 s; *c*) 72 km/h

36. Un paracaidista se abandona sin velocidad inicial desde el avión y desciende 122,5 m sin que se abra el paracaídas. Se abre éste y desciende con una deceleración de 5 m/s^2 recorriendo 232 m hasta llegar a tierra. Determinar el tiempo total de caída y la celeridad al llegar al suelo. Se desprecia el rozamiento con el aire del paracaidista antes de que se abra el paracaídas.

Resp. $t = 5 + 8 = 13$ s; $v = 9$ m/s

37. Se lanza un proyectil que asciende verticalmente con una celeridad inicial de 150 m/s. Mientras asciende, estalla a cierta altura y percibimos el ruido al cabo de 9,8 s. Determinar la altura y velocidad en aquel instante.

Resp. $h = 680$ m; $v = 73{,}5$ m/s

38. ¿Qué velocidad relativa a la Tierra debería tener un punto móvil en el ecuador para que la aceleración de Coriolis fuese igual a la aceleración de la gravedad? (En el ecuador, $g = 9{,}78$ m/s^2.)

Resp. $v = 67{,}24$ km/s tangente a la superficie terrestre contenida en el plano ecuatorial.

39. Un vehículo de 500 kg acelera, partiendo del reposo, bajo la acción de la fuerza dada por la expresión $F = F_0 - kt$, donde $F_0 = 100$ kp, $k = 5$ kp/s y t es el tiempo en segundos transcurrido a partir del arranque. Siendo rectilíneo el camino que recorre, calcular, al cabo de 10 s: *a*) La celeridad alcanzada por el móvil. *b*) El trabajo realizado por la fuerza durante dicho tiempo. *c*) La potencia media desarrollada por el vehículo durante el recorrido.

Resp. *a*) $v = 14{,}7$ m/s; *b*) $W = 54\,022$ J; *c*) $P_m = 7{,}35$ CV

40. Un punto sometido a la gravedad, se halla sometido simultáneamente a una aceleración atractiva dirigida hacia un punto fijo O, cuyo módulo es proporcional a la distancia a este punto, siendo k la constante de propor-

cionalidad. *a*) Demostrar que el campo resultante es un campo central. *b*) Si los potenciales parciales se consideran nulos en O, hallar la línea equipotencial $V = 0$ del campo total.

Resp. b) Circunferencia de centro $H(0, -g/k)$ que pasa por O.

41. Queremos hacer subir un escalón de altura 5,4 cm a un cilindro de radio 40 cm y masa 120 kg tirando de él con una fuerza horizontal que pasa por el eje. Determinar: *a*) Fuerza necesaria para levantar el cilindro. *b*) Si la fuerza formara un ángulo Θ con la horizontal, ¿cuál sería el valor de Θ que hiciera mínima a la fuerza y cuánto valdría ésta?

Resp. *a*) $F = 69{,}61$ kp; b) $\Theta = 30°7'2{,}3''$; $F_m = 60{,}21$ kp

42. Una viga horizontal tiene un apoyo liso en su extremo A y está articulada por su otro extremo O. En un punto de ella situado a una distancia de O igual a 2/3 de la longitud de la viga aplicamos una fuerza de 1000 kp que forma un ángulo de 60° con la horizontal y está dirigida hacia abajo. *a*) Determinar las reacciones suponiendo despreciable el peso de la viga. *b*) Lo mismo pero considerando la viga homogénea y de peso 60 kp.

Resp. *a*) $A_x = 0$, $A_y = 577$ kp, $O_x = 500$ kp, $O_y = 289$ kp,
b) $A_x = 0$, $A_y = 607$ kp, $O_x = 500$ kp, $O_y = 319$ kp

43. Una viga cilíndrica de radio R y generatriz a se levanta por un extremo hasta elevarlo a una altura h sobre el suelo mientras el otro se mantiene apoyado en éste. ¿Qué fuerza vertical deberemos aplicar al centro del extremo elevado para que se mantenga el equilibrio si es P el peso de la viga?

Resp. $$F = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{Rh}{a\sqrt{a^2 - h^2} - Rh}\right)$$

44. Una varilla, de peso despreciable, apoya un extremo en una pared y forma con ésta un ángulo de 60°. El otro extremo está a un nivel más alto y está unido a la misma pared mediante un hilo que forma con la varilla otro ángulo de 60°. De este extremo colgamos una masa de 100 kg. Determinar la tensión del hilo y el valor de la fuerza de compresión a que se encuentra sometida la varilla.

Resp. $T = 980$ N; $C = 980$ N

45. Dos esferas de radio r y masa m se apoyan mutuamente entre sí y contra las paredes de un cilindro vertical de radio $R < 2r$. Determinar el mínimo valor que ha de tener el peso P del cilindro para que las esferas no lo vuelquen.

Resp. $$P = 2mg\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

46. Un rodillo de masa m se apoya sobre dos planos inclinados que forman con la horizontal los ángulos Θ_1 y Θ_2. Determinar las reacciones en los apoyos, considerando éstos exentos de rozamiento.

Resp. $$R_1 = mg\frac{\operatorname{sen}\Theta_2}{\operatorname{sen}(\Theta_1 + \Theta_2)}; \qquad R_2 = R_1\frac{\operatorname{sen}\Theta_1}{\operatorname{sen}\Theta_2}$$

47. Una varilla de peso 20 N y longitud 2 m puede girar en un plano vertical en torno a un punto fijo O, sin rozamiento, situado en uno de sus

extremos. En la vertical de O y 2 m por encima de este punto se halla una polea de dimensiones y resistencia despreciables por la que pasa un hilo que va unido al otro extremo de la varilla. Determinar la fuerza con que hay que tirar del hilo para mantener en equilibrio la varilla en una posición que forme 60° con la horizontal.

Resp. $F = 5{,}17$ N

48. Un montacargas de masa 1000 kg tiene una base cuadrada de 2,4 m de lado y una altura de 3,6 m, estando suspendido de un cable. En el piso del montacargas se coloca una carga de 600 kg, cuyo c.d.m. se encuentra en el plano determinado por las guías y separado 60 cm de la vertical del c.d.m. del montacargas. Suponiendo despreciable el rozamiento, determinar las fuerzas que ejercen las guías sobre el montacargas cuando sube a velocidad constante.

Resp. $F_1 = 98$ N en la parte superior y $F_2 = 98$ N en la inferior, perpendicularmente a la guía y dirigidas hacia el montacargas.

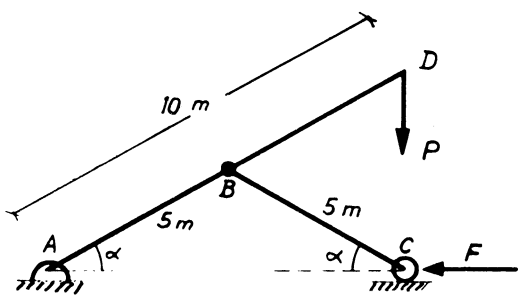
49. Dos bolas de masas 103,8 g y 80 g y radios respectivos 30 cm y 20 cm, penden de hilos iguales de 10 cm de longitud sujetos a un mismo punto por sus extremos superiores. Determinar los ángulos que forman los hilos con la vertical y sus tensiones.

Resp. $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$; $T_1 = 901$ N, $T_2 = 15\text{-}0{,}96$ N

50. En una pared vertical, sin rozamiento, se desea colgar un cuadro de peso P y marco rectangular, de modo que el lado inferior del marco (longitud a) se apoye en la pared horizontalmente y que el plano del cuadro forme con ella un ángulo de 30°. Para ello, se supone clavada en la pared una escarpia de la que ha de colgarse el cuadro por mediación de una cuerda cuyos extremos, pasando sobre aquélla, vayan sujetos convenientemente a los lados verticales (longitud b) del marco. a) Demostrar que el problema es posible. b) Determinar los esfuerzos que han de resistir la escarpia y la cuerda en función del peso P del cuadro, de la distancia D de la escarpia al lado horizontal que se apoya en la pared y de las longitudes a y b de los lados del marco.

Resp. b) $T' = \dfrac{P}{16D^2}\sqrt{4D^2(16D^2 + b^2) + a^2(4D + \sqrt{3})^2}$

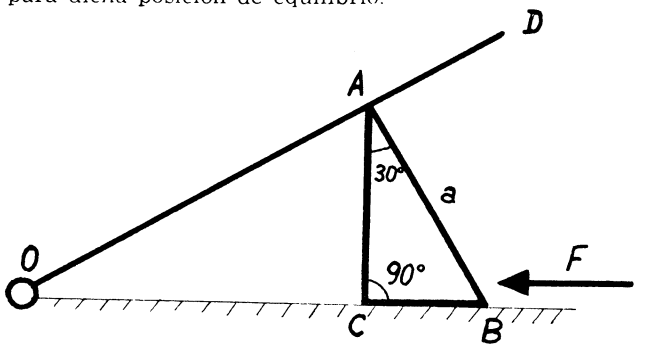
51. En la figura, A es una articulación fija, B es una articulación que permite el giro de la barra BC, C es un apoyo que permite el deslizamiento. En el



punto D hay un peso P de 2 toneladas. Despreciando el peso de las barras y el rozamiento, determinar la fuerza horizontal F a aplicar en C para que exista equilibrio cuando *a*) $\alpha = 30°$, *b*) $\alpha = 60°$. *c*) ¿Qué trabajo realizará **F** al pasar de la posición de *a*) a la de *b*)?

Resp. *a*) $F = 2\sqrt{3}$ T; *b*) $F = 2/\sqrt{3}$ T; *c*) $W = 10^4(\sqrt{3} - 1)$ kpm

52. La barra OD, homogénea, de peso P y longitud l, articulada en O, se apoya sobre la cuña triangular ABC de peso despreciable, como se indica en la figura. La cuña puede deslizar sobre el plano y el conjunto se mantiene en equilibrio gracias a la fuerza horizontal **F**, de valor adecuado para cada posición de equilibrio. Suponiendo ausencia de rozamientos, hallar: *a*) La distancia $x = OC$ para cuya posición de equilibrio la reacción del plano horizontal sobre la cuña esté aplicada en el punto B. *b*) El valor F de la fuerza para dicha posición de equilibrio.



Resp. *a*) $x = \frac{3}{2}a$; *b*) $F = \frac{Pl}{8a}$

53. Hallar el c.d.m. de una varilla de longitud b cuya densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al extremo $x = 0$.

Resp. $\bar{x} = 0{,}75\ b$

54. Una varilla homogénea de longitud 120 cm se dobla en ángulo recto por su mitad. Determinar su c.d.m. suponiendo que la L delimite el cuadrante positivo de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

Resp. $\bar{x} = 15$ cm, $\bar{y} = 15$ cm

55. Con un alambre homogéneo construimos una semicircunferencia de radio R cerrada por un diámetro (del mismo alambre). Tomando como origen de coordenadas el punto medio del diámetro mencionado y éste como eje de abscisas, determinar el c.d.m.

Resp. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 2R/(\pi + 2)$

56. Dada media onda de sinusoide (entre 0 y π), determinar el c.d.m. de la superficie comprendida entre la sinusoide y el eje de abscisas.

Resp. $\bar{x} = \pi/2$, $\bar{y} = \pi/8$

57. Tenemos un círculo de radio R al cual practicamos un orificio circular de radio r con centro en un punto distante b del centro O del círculo. Sa-

biendo que $b + r \leq R$, determinar el c.d.m. Tómese como eje Ox el de simetría de la figura.

Resp. $\bar{x} = -\dfrac{br^2}{R^2 - r^2}$

58. Hallar el c.d.m. de un sector circular de radio R y ángulo θ, tomando como eje de abscisas la bisectriz del sector y como eje de ordenadas la perpendicular al anterior contenida en el plano del sector y que pase por el centro del círculo al que pertenece.

Resp. $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = (R \text{ sen } \theta/2)/(3\theta/2)$

59. De una corona circular de radios a y b se corta un ángulo θ. Determinar el c.d.m. de la corona cortada. Eje Ox el de simetría.

Resp. $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \dfrac{2}{3}\ \dfrac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}\ \text{sen}\ \dfrac{\theta}{2}$

60. Una esfera de radio R tiene una cavidad esférica de radio r con centro distante b del centro de la esfera, siendo $b + r \leq R$. Determinar el c.d.m.

Resp. $\bar{r} = -\dfrac{br^3}{R^3 - r^3}$ a lo largo del eje de simetría

61. A lo largo de un cilindro de longitud l y radio r puede deslizarse un cilindro hueco de altura h cuyos radios son r y R, por lo que encaja perfectamente con el anterior. Colocándolo en la posición extrema, determinar el c.d.m. del conjunto sabiendo que son del mismo material. Aplicación: Si $r = 100$ cm, $R = 20$ cm, $h = 10$ cm, ¿cuál ha de ser la longitud l del cilindro para que el c.d.m. esté justamente en el eje del cilindro tocando el plano extremo del hueco?

Resp. $\bar{x} = [(R^2 - r^2)(l - h/2) + r^2 l^2/2]/[R^2 h + r^2 (l - h)]$;
$l = 50{,}55$ cm.

62. Determinar el c.d.m. de una semiesfera homogénea de radio R. El eje Oy es el de simetría y tiene origen en el centro de la esfera.

Resp. $\bar{y} = 3R/8$

63. Determinar el c.d.m. de un depósito cilíndrico de altura h y radio básico R, de material uniforme. Está cerrado por la base y abierto por arriba.

Resp. $\bar{y} = \dfrac{h^2}{(2h + R)}$

64. Determinar el momento de inercia de un cilindro hueco muy delgado de masa m y radio R, respecto a una generatriz.

Resp. $I = 2mR^2$

65. Determinar el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo de masa m y radio R respecto a una de sus generatrices.

Resp. $I = 3mR^2/2$

66. Una varilla de 1,2 m de longitud y 0,6 cm^2 de sección está constituida por un material de densidad que varía con la distancia al punto medio de la varilla según la ley $d = 5 + 2{,}2\,x$ g/cm^3 (donde x es la abscisa en metros cuando se toma como origen el punto medio de la varilla). Determinar:

a) La posición de su c.d.m. *b*) El momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a ella y que pase por su c.d.m.

Resp. *a*) $\bar{x} = 0{,}0528$ m; $\bar{I} = 0{,}0422$ kg·m²

67 Una rueda tiene un diámetro de 2 m. La llanta es delgada y tiene una masa de 4 kg. Dicha rueda tiene 20 radios de 100 g cada uno. Determinar el momento de inercia respecto al eje de la rueda.

Resp. $I = 14/3$ kg·m²

68. Determinar el momento de inercia de una esfera hueca de radio R y masa m uniformemente repartida, supuesta muy delgada, respecto a un eje tangente a la misma.

Resp. $I = \frac{4}{3} mR^2$

69. Dada una esfera homogénea de radio R y masa m, determinar a qué distancia del centro estará colocado un eje para que el momento de inercia respecto a él sea igual al de una cáscara esférica, de igual radio y masa total, uniformemente repartida, respecto a un eje que pase por su centro.

Resp. $x = 2R/\sqrt{15}$

70. A un cilindro macizo homogéneo de radio $R = 20$ cm y altura $h = 2$ m, cuya densidad es de 7,8 g/cm³, le fijamos en su superficie lateral y normalmente a ella dos varillas de 1 m de longitud y 10 cm² de sección cada una, siendo su densidad de 5,8 g/cm³. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje del cilindro.

Resp. $I = 105$ kg·m²

71. Una semicircunferencia de masa M uniformemente repartida y de radio R, atrae a un punto de masa m situado en el centro de la circunferencia, según la ley de Newton. Hallar: *a*) La fuerza total de atracción. *b*) El valor del potencial.

Resp. *a*) $2\,G\,mM/(\pi R^2)$; *b*) $V = GM/R$

72. Se dan las masas newtonianas puntuales 1, 3 y 6 situadas, respectivamente, en los puntos $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Hallar: *a*) El flujo del campo que, debido a dichas masas, atraviesa la esfera de centro en el origen y radio $R = 2{,}5$. *b*) El flujo que atraviesa la esfera de radio 2 y centro el punto $P(0, 2, 0)$. *c*) El flujo a través del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Resp. *a*) $\Phi = -16\pi G$; *b*) $\Phi = -12\pi G$; *c*) $\Phi = -12\pi G$

73. Supongamos practicado en la Tierra un conducto cilíndrico que pase por el centro. Colocando un punto material en él, se demuestra que oscila con movimiento armónico simple. Determinar el período, tomando la densidad de la Tierra $d = 5{,}5$ g/cm³. ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²).

Resp. $T = 5068$ s

74. Desde el suelo disparamos verticalmente un proyectil con celeridad inicial de 8 km/s. Suponiendo que el rozamiento con el aire consume el 10 % de la energía, hállese la máxima altura alcanzada sobre el suelo.

Resp. $h = 5433{,}9$ km

75. Desde cierta altura sobre el suelo lanzamos horizontalmente un satélite con celeridad de 7,6 km/s. Despreciando los rozamientos, determinar la altura desde la que habría que dispararlo para que se mantuviera en órbita circular alrededor de la Tierra. (Radio terrestre $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km.)

Resp. $h = 549{,}5$ km

76. Suponiendo que la Tierra fuese una esfera uniforme de radio 6400 km y densidad 5,5 g/cm^3, *a*) ¿cuánto variaría su momento cinético si experimentase una contracción uniforme (p. ej. por enfriamiento) de su radio en un 2 %? *b*) ¿Cuánto debería variar el período de rotación para que el momento cinético fuese el mismo?

Resp. *a*) $\Delta L = 2{,}788 \cdot 10^{32}$ kg·m^2/s
b) $\Delta T = -0{,}0396$ $T = -2{,}88 \cdot 10^{-6}$ s

77. La masa de la Luna vale aproximadamente $6{,}7 \cdot 10^{22}$ kg y su radio $16 \cdot 10^5$ m. Sabiendo que la constante de la gravitación es $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, determinar: *a*) La intensidad de la gravedad lunar en su superficie. *b*) El período de oscilación de un péndulo simple cuyo período en la Tierra sea de 1 s. *c*) ¿Cuánto pesa en la Luna un cuerpo que en la Tierra pesa 49 N?

Resp. *a*) $g_L = 1{,}745$ m/s^2; *b*) $T = 2{,}37$ s; *c*) $P = 8{,}725$ N

78. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra con una celeridad de 6370 m/s. Determinar: *a*) la altura sobre la superficie terrestre y *b*) el período de rotación (Radio terrestre = 6370 km).

Resp. *a*) $h = 3430$ km; *b*) $T = 2^h\, 41^m\, 3^s$

79. Sabiendo que la constante de la gravitación es $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2, que el radio terrestre es $R = 6370$ km, que la gravedad normal es $g_0 = 9{,}806$ m/s^2 en la superficie terrestre y suponiendo ésta esférica, determinar: *a*) la masa de la Tierra; *b*) su densidad media.

Resp. *a*) $m = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; *b*) $d = 5{,}5$ g/cm^3

80. Un astronauta llega a un planeta desconocido. Para determinar alguna de sus características, suelta un objeto dentro de la cápsula espacial cuando se encuentra a 5000 km de altura sobre la superficie del planeta, observando que llega al suelo de la cápsula con una velocidad de 3 m/s. Una vez posado sobre la superficie del planeta, repite el experimento y observa que el tiempo empleado en la caída es la mitad del transcurrido en el primer caso. Siendo, en ambos casos, igual a 2 m la altura de la caída y $G = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$ cm$^3 \cdot$s$^{-2} \cdot$g^{-1} la constante de gravitación universal anotada en la libreta del astronauta, puede éste determinar: *a*) Radio del planeta, supuesto éste esférico y homogéneo. *b*) Intensidad de la gravedad en la superficie. *c*) Masa del planeta. ¿Cuáles fueron dichos valores?

Resp. *a*) $R = h = 5000$ km; *b*) $g = 9$ m/s; *c*) $M = 33{,}74 \cdot 10^{23}$ kg

81. Supuesta la Tierra esférica y homogénea, de radio R, hallar: *a*) El radio que ha de tener un cilindro de revolución, indefinido y homogéneo, del

mismo material que aquélla, para que la intensidad de la gravedad en su superficie sea igual a la de la superficie terrestre. b) La distancia d de un punto a la superficie cilíndrica tal que la intensidad de la gravedad sea la misma que la de otro punto situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, dando el resultado en función de R y de h.

Resp. a) $r = 2R/3$; b) $d = \dfrac{2h(h+2R)}{3R}$

82. Dos alambres indefinidos homogéneos, perpendiculares entre sí, sobre los cuales hay distribuida uniformemente una masa newtoniana a razón de $4 \cdot 10^{-3}$ g/cm ejercen simultáneamente una acción atractiva sobre los puntos del plano definido por aquéllos. Siendo $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante de la gravitación y tomando como ejes coordenados ambos alambres, hallar: a) La expresión general del campo total creado en un punto del plano. b) Su valor en el punto $A(1, 1)$. c) La expresión general del potencial total. d) La naturaleza de las curvas equipotenciales. Como origen de potenciales, tómese la curva equipotencial que pasa por el punto $A(1, 1)$.

Resp. a) $\mathbf{E} = -2Gd\left(\dfrac{1}{x}\mathbf{i} + \dfrac{1}{y}\mathbf{j}\right)$; b) $E = -75{,}24 \cdot 10^{-11}$ dinas/g;

c) $V = 2Gd \ln xy$; d) $xy = e^{V/2Gd} =$ constante, o sea hipérbolas equiláteras de asíntotas Ox y Oy.

83. Una bala de fusil de 20 g choca y se incrusta en un bloque de masa 1480 g que se apoya sobre una superficie horizontal lisa, estando unido a un resorte que se comprime 20 cm a causa del movimiento del bloque. La fuerza necesaria para comprimir el resorte es proporcional a su acortamiento y se precisa una fuerza de 200 N para acortarlo 30 cm. Hallar la celeridad de la bala antes del choque.

Resp. $v = 316{,}22$ m/s

84. Una bola de billar en reposo es alcanzada por otra que se mueve a 2 m/s. Después del choque, una de ellas se mueve con una velocidad de 1 m/s que forma un ángulo de 60° con la velocidad de la bola antes del choque. Determinar la velocidad de la bola después del choque.

Resp. $v'_2 = 1{,}73$ m/s formando un ángulo de 30° con la dirección del movimiento inicial.

85. Una partícula pesada se lanza en el seno de un fluido con una velocidad horizontal v_0. Sabiendo que la resistencia que opone el fluido al movimiento es $R = kmv$, donde m y v son, respectivamente, la masa de la partícula y la velocidad en cada instante y suponiendo despreciable el efecto del empuje, calcular: a) Las componentes de la velocidad en cada instante. b) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

Supongamos que en el instante inicial el móvil se encuentra en el origen de coordenadas.

Resp. a) $v_x = v_0 e^{-kt}$; $v_y = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})$

b) $x = \dfrac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$; $y = \dfrac{g}{k}t + \dfrac{1}{k}(e^{-kt} - 1)$

86. Un impulso de un gramo-minuto aplicado a un cuerpo que se mueve en su misma dirección pero en sentido opuesto a una velocidad de 0,4 m/s, le incrementa su energía cinética en un joule. Calcular la masa de dicho cuerpo.

Resp. $m = 140$ g

87. Un automóvil de 2000 kg se ha de acelerar uniformemente a 3 m/s² durante un segundo. Si despreciamos los rozamientos, ¿qué potencia media se precisará?

Resp. $P = 9000$ W $= 12$ CV

88. Una vagoneta cuya masa total con carga, incluida la de un hombre que viaja en su interior, es M, se mueve sin rozamiento a lo largo de una vía recta con velocidad v constante. En un cierto instante, el hombre lanza en sentido contrario al del movimiento un fardo de masa m con velocidad tal que cae al suelo verticalmente. Determinar: *a*) La variación de energía cinética que sufre la vagoneta. *b*) Después del lanzamiento del objeto, la vagoneta sube por una rampa que forma 30° con la horizontal, sin rozamiento; hallar la longitud recorrida sobre el plano inclinado hasta detenerse.

Resp. *a*) $\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M-m}v^2$; *b*) $x = \frac{M^2 v^2}{g(M-m)^2}$

89. Sobre una superficie horizontal lisa se lanza una bola que desliza sin rodar con velocidad $v = 28$ m/s. De pronto, la superficie horizontal es rugosa y de coeficiente de rozamiento igual a 0,4. Determinar: *a*) La velocidad del centro de la bola cuando ruede sin deslizar. *b*) El camino recorrido hasta que deje de deslizar.

Resp. *a*) $v' = 20$ m/s; *b*) $x = 28{,}57$ m

90. Una escalera que mide 8 m y cuya masa es de 30 kg está apoyada contra una pared lisa, con su extremo inferior sobre un suelo rugoso en un punto que dista 3 m de la pared. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento escalera-suelo es de 0,3 determinar si la escalera estáá o no en equilibrio.

Resp. Sí

91. Se tira de un trineo de 600 kg con una fuerza de 980 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Sabiendo que el trineo se mueve a velocidad constante, determinar el coeficiente de rozamiento.

Resp. $\mu = 0{,}15$

92. En un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal tenemos un bloque de masa m al que queremos hacer subir por el plano a velocidad constante. Determinar la fuerza necesaria sabiendo que el coeficiente de rozamiento es μ.

Resp. $F = mg\frac{\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta}$

93. Un cuerpo situado en la parte superior de un plano inclinado 60° de longitud 4 m se lanza hacia la base con una velocidad de 5 m/s paralela al plano. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,2 determinar: *a*) La velocidad al llegar a la base. *b*) ¿Cuál debería ser el coefi-

ciente de rozamiento para que llegase con la misma celeridad de 5 m/s?
Resp. *a)* $v = 9{,}22$ m/s; *b)* $\mu = 1{,}73$

94. Un bloque de 2 kg está colocado a 10 cm del eje de una plataforma giratoria horizontal que se acelera gradualmente partiendo del reposo. A la celeridad angular de 7 rad/s comienza a deslizar el bloque. Calcular: *a)* El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la plataforma. *b)* El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento desde la posición inicial hasta que la masa se haya alejado 20 cm del eje de rotación.
Resp. *a)* $\mu = 0{,}5$; *b)* $W = 0{,}1$ kpm

95. Sobre una polea de radio 1 m se arrolla un hilo flexible de longitud 8 m cuya masa por unidad de longitud es de 100 g/m. De los extremos del hilo cuelgan dos masas de valores 2,0 y 2,5 kg. La mayor se encuentra inicialmente en reposo en su posición más alta. Al soltarla, determinar: *a)* la aceleración angular inicial del sistema y *b)* la velocidad angular cuando la menor esté en la posición más alta. (Momento de inercia de la polea, $I = 0{,}01$ kg·m².)
Resp. *a)* $\alpha = 0{,}03$ rad/s²; *b)* $\omega = 3$ rad/s

96. Un hemisferio hueco de radio R gira con velocidad angular ω en torno a su eje de simetría vertical. En su interior colocamos una pequeña bola que queda en equilibrio a una distancia x del eje de rotación. Despreciando el rozamiento, hallar x.
Resp. $x = (R^2 - g^2/\omega^4)^{1/2}$

97. Un cilindro macizo y homogéneo de 0,2 m de radio y 5 kg de masa puede girar sin rozamiento en torno a un eje horizontal coincidente con su eje de revolución. Arrollamos una cuerda al cilindro habiendo fijado un extremo en él y colgado del otro un cuerpo de masa 50 g. Determinar: *a)* La aceleración con que se mueve el cuerpo. *b)* La tensión de la cuerda durante el movimiento.
Resp. *a)* 0,19 m/s²; *b)* 0,48 N

98. Por la garganta de una polea de masa y rozamiento despreciables, cuyo radio es 0,1 m, pasa una cuerda de uno de cuyos extremos pende un peso de 19,6 N y del otro uno de 39,2 N. Determinar: *a)* La aceleración angular de la polea al dejar libres los cuerpos. *b)* La tensión de la cuerda. *c)* Si los pesos (supuestos puntiformes) estaban inicialmente a un mismo nivel, cuánto tiempo tardarán en desnivelarse 6 m.
Resp. *a)* $\alpha = 32{,}7$ rad/s²; *b)* $T = 26{,}13$ N; *c)* $t = 1{,}36$ s

99. Un disco homogéneo puede girar en su plano vertical alrededor de un eje fijo horizontal que pasa por un punto O de la periferia del disco. El centro C de éste se halla, inicialmente, en la misma horizontal del punto O. Se libera entonces el disco sin velocidad inicial y se supone ausencia de rozamientos. Determinar: *a)* El momento de inercia del disco respecto al eje normal a él y que pasa por O. *b)* La velocidad de C cuando OC forme un ángulo de 45° con la vertical. *c)* La fuerza en O en ese instante. Datos: Masa de disco = 2 kg, radio = 20 cm.
Resp. *a)* $I = 0{,}12$ kg·m²; *b)* $v_C = 1{,}34$ m/s; *c)* $O_x = 1{,}54$ N, $O_y = 21{,}16$ N

100. Un disco horizontal homogéneo de radio $R = 30$ cm y masa $m = 20$ g, gira con velocidad angular constante de 40 rad/s en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Se deja caer verticalmente una masa de 10 g de cera que se deposita a 10 cm del centro del disco. Calcular la nueva velocidad de rotación que adquirirá el disco.

Resp. $\omega' = 36$ rad/s

101. Una lámina homogénea, en forma de triángulo rectángulo, de masa 200 g y cuyos catetos miden 3 y 4 cm, puede girar alrededor de un eje vertical que pasa por el vértice del ángulo recto. Colocado en posición horizontal, se le aplican tres fuerzas, cada una soportada por un lado distinto y cuyos módulos expresados en newton coinciden numéricamente con la longitud del lado que la soporta. Determinar la aceleración angular en el instante de aplicar las fuerzas.

Resp. $\alpha = 1440$ rad/s^2

102. Sobre una barra uniforme situada sobre una mesa horizontal exenta de rozamiento se ejerce una fuerza horizontal perpendicular a la barra en uno de sus extremos. La barra parte del reposo, su longitud es L y su masa M. ¿Qué punto de la barra tiene aceleración inicial nula?

Resp. $x = L/6$

103. Un proyectil de masa m y dimensiones despreciables se mueve horizontalmente a velocidad v. Choca normalmente a una cara de un cubo de masa $4m$ y arista L, quedando incrustado en el centro de masa del cubo. Éste está apoyado sobre una superficie horizontal y puede girar alrededor de la arista O fija en el suelo, perpendicular a la dirección del proyectil y situada en la cara opuesta a la de entrada de éste. Hallar el valor máximo que puede tener v sin que vuelque el sistema.

Resp. $v = 16{,}03$ m/s (L = 1 m)

104. Una varilla de longitud 1 m cae horizontalmente partiendo del reposo. Al cabo de 2 s se fija uno de sus extremos; determinar la velocidad angular inicial de dicha varilla al girar en torno al extremo fijo.

Resp. $\omega = 29{,}4$ rad/s

105. Sobre una superficie lisa se lanza horizontalmente un cubo de arista 1 m con velocidad constante paralela a una arista horizontal. Al llegar a cierta posición, choca con una varilla fija situada en la superficie y perpendicular a la velocidad. Determinar la celeridad mínima que originaría el vuelco del cubo.

Resp. $v = 3{,}29$ m/s

106. Una varilla de peso despreciable y longitud L, que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su punto medio manteniéndose durante su movimiento en un plano vertical, tiene fijadas en sus dos extremos sendas masas puntuales m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$). Partiendo del reposo en posición horizontal, calcular la velocidad que llevan ambas masas cuando, abandonando el sistema a la acción de la gravedad, alcanzan la posición vertical.

Resp. $$v = \sqrt{gL\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}$$

107. Un punto P de masa m, recorre una circunferencia de centro O y radio R por efecto de una fuerza atractiva que dimana de un punto A de dicha circunferencia. Siendo C la velocidad areolar, determínese a) la celeridad de P y b) la fuerza que sobre él actúa, en función del ángulo φ que en cada instante forma el radio OP con el diámetro correspondiente al centro de atracción A.

Resp. $a)\ v = \dfrac{C}{R\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$; $b)\ F = \dfrac{mC^2}{R^3\cos^5\dfrac{\varphi}{2}}$

108. Sobre un plano inclinado 60° respecto a la horizontal se suelta, sin velocidad inicial, un bloque de masa $m = 300$ g que, después de recorrer una distancia a, choca contra un muelle perfectamente elástico de constante $k = 2$ kg/cm, quedando éste comprimido 5 cm un instante antes de iniciar el bloque su retroceso sobre el plano. Siendo $\mu = 0{,}2$ el coeficiente de rozamiento, hallar: a) La distancia a que recorre el móvil desde la posición inicial hasta que choca con el muelle. b) La distancia que ascenderá a lo largo del plano, contada a partir de la posición del muelle comprimido.

Resp. $a)\ a = 103{,}8$ cm; $b)\ x = 86{,}27$ cm

109. Una varilla pesada y homogénea AB, de longitud l, está en equilibrio apoyada en su extremo A y articulada en un punto intermedio O, respecto al cual puede girar sin rozamiento en un plano vertical. En un cierto instante se suprime el apoyo A. Se pide: a) El valor que debe tener la distancia OB para que la reacción que aparece en O al iniciarse el giro sea igual a la que existía en condiciones de equilibrio. b) La velocidad alcanzada por el extremo A cuando la varilla pase por la posición vertical.

Resp. $a)\ OB = l/3$; $v_A = 2\sqrt{\dfrac{gl}{3}}$

110. Un hombre de 80 kg está de pie en una barca de 240 kg, ambos en reposo. Estando el hombre a 10 m de una orilla, empieza a moverse hacia ella a velocidad constante y se para después de haber recorrido 3 m. Determinar la distancia a la orilla cuando se detiene.

Resp. $x = 7{,}75$ m

111. Una varilla homogénea de 1 m de longitud puede girar en un plano vertical en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Colocando la varilla horizontal y soltando el extremo libre, determinar: a) La aceleración angular de la varilla cuando forma un ángulo de 30° con la vertical. b) La velocidad angular de la varilla cuando su dirección es vertical. c) La velocidad del centro de masa en la posición vertical. (Se desprecian los rozamientos.)

Resp. $a)\ \alpha = 7{,}35$ rad/s^2; $b)\ \omega = 5{,}42$ rad/s; $c)\ v_G = 2{,}52$ m/s

112. Una esfera maciza, pesada y homogénea, se abandona sin velocidad inicial sobre un plano inclinado 30° respecto a la horizontal. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre esfera y plano es igual a 0,3, se pide: a) Demostrar que la esfera rueda sin deslizar, estableciendo una relación que justifique la respuesta. b) Calcular la aceleración del centro de masa de la esfera.

Resp. *a)* $R/r = 1{,}81 > 1$, siendo R la fuerza de rozamiento máxima y r la fuerza de rozamiento existente. *b)* $a = 5g/14$.

113. Dos discos homogéneos iguales, de masa m y radio R, están montados sobre un mismo eje horizontal respecto al cual pueden girar libremente y deslizar a lo largo de él. Las superficies de los discos son rugosas. Supuestos animados de velocidades angulares del mismo sentido cuyas celeridades respectivas sean ω y 3ω (constantes en un principio), se ponen en contacto por sus superficies rugosas después de aproximarlos por deslizamiento sobre el eje y se observa que, al cabo de un tiempo, giran juntos con igual velocidad angular como consecuencia del rozamiento entre sus caras contiguas. Hallar: *a)* La celeridad angular común. *b)* El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento desde que se ponen los discos en contacto hasta que adquieren velocidad común.

Resp. *a)* $\omega' = 2\omega$; *b)* $W = \dfrac{mR^2}{2}\omega^2$

114. En un alambre delgado homogéneo de masa M que tiene la forma de una circunferencia de radio R situada en un plano vertical está ensartada, comc una cuenta de collar, una bolita de masa m y radio despreciable que puede deslizar sin rozamiento. Estando la bolita en la parte más alta de la circunferencia, se imprime al conjunto una rotación alrededor del diámetro vertical, de celeridad angular ω_0 y la bolita, por acción de la gravedad, comienza a deslizar sobre el alambre. Hallar: *a)* La celeridad angular del alambre cuando la bolita alcanza el extremo del diámetro horizontal. *b)* La variación de energía cinética entre ambas posiciones.

Resp. *a)* $\omega = \dfrac{M}{2m + M}\omega_0$; *b)* $\Delta E = \dfrac{1}{2}\dfrac{Mm}{2m + M}R^2\omega_0^2$

115. Una esfera de masa 2 kg choca centralmente con otra en reposo de masa 4 kg. Después del choque, la primera queda en reposo. Determinar: *a)* El coeficiente de percusión. *b)* ¿Es necesario conocer la velocidad de la primera bola?

Resp. *a)* $k = 0{,}5$; *b)* No

116. Una esfera de masa $m_1 = 4$ kg se lanza contra otras dos de masas m_2 y m_3 que están en reposo. Los centros están alineados y el coeficiente de percusión es $k = 0{,}5$. Determinar m_2 para que la esfera de masa m_3 adquiera la máxima velocidad posible y hállese su valor. Datos: $v_1 = 10$ m/s, $m_3 = 9$ kg.

Resp. $m_2 = 6$ kg, $v_3' = 3{,}6$ m/s

117. Tres esferas iguales 1-2-3 están alineadas sobre un plano horizontal. Comunicamos a la primera una velocidad v_1 y choca centralmente con la segunda. Después de este choque, la segunda choca con la tercera y por último, la primera con la segunda. Determinar las velocidades de cada esfera después del choque final. Datos: $v_1 = 16$ m/s, coeficiente de percusión $k = 0{,}5$.

Resp. $v_3' = 9$ m/s, $v_1'' = 3{,}25$ m/s, $v_2''' = 3{,}75$ m/s

118. Un bloque de masa $m = 80$ kg cae desde una altura $h = 2{,}5$ m sobre un pilote de masa $m' = 60$ kg y éste se clava en el suelo una profundidad

$d = 7$ cm. *a*) ¿Cuál es la velocidad común de bloque y pilote inmediatamente después del choque, supuesto totalmente inelástico? *b*) ¿Cuál es el valor medio de la resistencia del suelo a la penetración?

Resp. *a*) $v = \sqrt{2gh}\,\dfrac{m}{m+m'} = 4$ m/s; *b*) $R = \dfrac{m+m'}{2d}\,v^2 = 16$ kN

119. Tres esferas tienen los centros alineados. La segunda y la tercera están en reposo mientras la primera tiene una velocidad **v** dirigida sgún la recta de los centros y hacia la segunda, con la cual choca. Ésta choca, a su vez, con la tercera. Sabiendo que las masas están, respectivamente, en la razón 3:6:2, determinar la velocidad de la tercera después del choque.

Resp. $v_3' = v$

120. Una barra homogénea de masa 1 kg y longitud 8/3 m, está suspendida por un extremo y recibe una percusión horizontal de 3,13 N·s en su centro de percusión. Determinar el ángulo girado por la barra.

Resp. $\theta = 60°$

121. Una varilla cilíndrica de longitud h y densidad d se sujeta verticalmente por su extremo superior. Determinar: *a*) El alargamiento debido a su propio peso. *b*) La variación unitaria de volumen.

Resp. $\Delta l = dgh^2/2E$; $\Delta V/V = dgh(1-2\sigma)/2E$

122. Un cable de 100 m de longitud está fijo por su extremo superior y pende verticalmente. Su sección recta es de 10 cm², su densidad 7,8 g/cm³ y su módulo de Young es $E = 2\cdot10^6$ kp/cm². De su extremo inferior cuelga una masa de 2 toneladas. Determinar: *a*) El alargamiento teniendo en cuenta el peso propio. *b*) La tensión en la sección media del cable.

Resp. $\Delta l = 1{,}195$ cm; $\Phi = 239$ kp/cm² $= 23{,}42$ MN/m²

123. Un prisma recto de aristas 4 cm, 5 cm y 2 cm está sometido a las fuerzas $F_1 = 5000$ N, $F_2 = -8000$ N, $F_3 = -6000$ N, normales a las caras 1, 2 y 3 (v. fig. 9.4). Sabiendo que $E = 25\cdot10^{10}$ N/m² y que el coeficiente de Poisson vale 0,3, determinar las deformaciones.

Resp. $\epsilon_1 = 35{,}6\cdot10^{-6}$; $\epsilon_2 = -42{,}4\cdot10^{-6}$; $\epsilon_3 = -6\cdot10^{-6}$

124. Un alambre de acero ($E = 2{,}1\cdot10^6$ kp/cm²) tiene un diámetro de 2 mm y una longitud de 3 m y pende del techo. A su extremo inferior se une otro alambre del mismo material pero de doble longitud y sección mitad, de cuyo extremo inferior se cuelga una carga de 50 kg. Hallar el alargamiento del sistema.

Resp. $\Delta l = 1{,}137$ cm

125. Un cuerpo de 20 kg está sujeto a un alambre de acero ($E = 2{,}100\cdot10^6$ kp/cm²) cuya longitud natural es de 50,00 cm y lo hacemos girar a 300 rpm. El diámetro del alambre es de 3,000 mm. La trayectoria circular del cuerpo está contenida en un plano vertical. Calcular la longitud del cable cuando pase el cuerpo por la posición más baja.

Resp. $l = 50{,}34$ cm

126. Una escalera de tijera tiene dos patas de 4 m de longitud que forman un ángulo de 60° manteniendo en tensión un alambre de acero de $10/\sqrt{3}$ mm²

de sección que une los puntos que se hallan a 3 m de la articulación. Una persona de 80 kg asciende las tres cuartas partes de uno de los lados. Calcular el alargamiento del alambre cuando la persona se halla detenida en dicha posición. Se suponen despreciables los rozamientos y que el ángulo se mantiene en 60° para todos los cálculos. Módulo de Young del acero 20 000 kp/mm².

Resp. $\Delta l = 0{,}6$ mm

127. Calcular la densidad del agua del mar a una profundidad de 100 m, sabiendo que en la superficie su densidad es 1030,0 kg/m³ y que la compresibilidad del agua es de $50 \cdot 10^{-6}$ atm^{-1}.

Resp. $d = 1030{,}5$ kg/m³

128. Tres alambres de longitud común 3 m tienen por secciones 1, 2 y 3 mm², respectivamente. Sus módulos de Young, dados en igual orden, son 2, 1,2 y 0,8 (10^4 kp/mm²). Un extremo de cada alambre se halla sujeto a un punto *A* del techo y los otros extremos a un punto *B* de un cuerpo de 680 kg. Determinar: *a*) El alargamiento común de los tres alambres. *b*) La tensión a que está sometido cada uno de ellos. *c*) El módulo de Young de un alambre de sección igual a la suma de secciones e igual longitud que se alargara lo mismo al suspender el cuerpo. Se supone que en ningún caso se rebasa el límite de elasticidad.

Resp. *a*) $\Delta l = 3$ cm; *b*) $T_1 = 200$ kp, $T_2 = T_3 = 240$ kp; *c*) $E = 11\,333$ kp/mm²

129. Un tubo rígido de 1,2 m de longitud y 3,6 cm² de sección se llena de agua. Se pide: *a*) La variación de longitud que experimenta la columna líquida cuando se aplica una fuerza de 47 kp mediante un émbolo que actúa por un extremo del líquido. *b*) La variación relativa de la densidad del agua, expresada en tanto por ciento. Dato: Módulo de compresibilidad del agua $= 2{,}2 \cdot 10^4$ kp/cm².

Resp. *a*) 0,237 mm; *b*) 0,02 %

130. Un émbolo se mueve verticalmente con movimiento armónico simple de amplitud 10 cm. Determinar el número máximo de oscilaciones por minuto que puede dar sin que se separe de él un cuerpo colocado encima.

Resp. 94,5

131. Una masa puntual se mueve con movimiento armónico simple a lo largo de una recta horizontal. Cuando se halla 10 cm a la derecha del centro de la vibración, moviéndose hacia la izquierda, su energía cinética vale 100 erg y su energía potencial también vale lo mismo. Si la masa es de 2 g, escribir la ecuación del m.a.s. mencionado.

Resp. $x = 10\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$

132. Un muelle se alarga 2 cm cuando se tira de él con una fuerza de 19,6 N. Si de su extremo se suspende una masa de 4 kg y se la hace oscilar, *a*) hallar el período de las oscilaciones. Si la amplitud de éstas es de 5 cm y medimos el tiempo a partir de un instante en que pasa por la posición

de equilibrio estático en sentido ascendente, hallar para el instante $t = 2$ s, b) su posición, y c) su velocidad.

Resp. a) $T = 0{,}4$ s; b) $x = 0$; c) $v = 25\pi$ cm/s

133. Un disco uniforme de radio R puede oscilar en torno a un eje horizontal que pasa por un punto de su periferia y es normal a su plano. Determinar el período de oscilación para pequeñas amplitudes.

Resp. $T = 2\pi\sqrt{3R/2g}$

134. Una varilla de longitud L y masa m puede oscilar en torno a un eje horizontal, estando la oscilación contenida en un plano vertical. Determinar el punto de suspensión (distancia a un extremo) para que el período sea mínimo.

Resp. $x = 0{,}789\,L$ o bien $x = 0{,}211\,L$

135. Con un alambre homogéneo formamos un aro de 0,6 m de radio. Dicho aro puede oscilar en torno a un eje horizontal tangente al mismo en su punto más alto y que en su posición de equilibrio está contenido en el mismo plano vertical que el aro. Determinar el período para oscilaciones de pequeña amplitud.

Resp. $T = 1{,}9$ s

136. Un cilindro macizo homogéneo puede girar en torno a un eje horizontal coincidente con la generatriz más alta. Otro cilindro de iguales dimensiones es hueco y tiene la misma masa pero distribuida superficialmente con un espesor despreciable. Hacemos oscilar los dos cilindros en torno al mismo eje antes citado. Determinar la razón de los períodos de oscilación paro ángulos pequeños.

Resp. $T_1/T_2 = 0{,}866$

137. Un aro homogéneo de radio R puede girar sin rozamiento en torno a un eje horizontal que pasa por su extremo superior y es normal a su plano. Determinar el período de las oscilaciones si se separa un poco de su posición de equilibrio.

Resp. $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$

138. Del techo de un ascensor cuelga un péndulo simple que hacemos oscilar con pequeña amplitud. Si el ascensor asciende o desciende con aceleraciones opuestas de igual módulo, observamos que la razón de los períodos es 2. Hallar: a) El módulo de la aceleración del ascensor. b) La variación del período si ascendiese o descendiese a velocidad constante.

Resp. a) $a = 5{,}88$ m/s^2; b) $\Delta T = 0$

139. Un punto material de masa 10 g se halla sometido a una fuerza recuperadora de 50 din/cm y a una fuerza amortiguadora caracterizada por $R = 30$ din·cm^{-1}·s. Si sobre dicho punto se aplica una fuerza periódica de pulsación 50 rad/s y amplitud 100 dinas, hallar: a) La impedancia mecánica. b) La velocidad máxima. c) La pulsación de resonancia. d) La amplitud de la velocidad en condiciones de resonancia.

Resp. a) $Z = 499{,}9$ din·cm^{-1}·s; b) $v_0 = 0{,}02$ cm/s;
c) $\omega_r = 2{,}236$ rad/s; d) $v_{or} = 3{,}33$ cm/s

140. Una masa oscila unida a un resorte de constante elástica k, con movimiento armónico simple de amplitud A. *a*) Cuando la elongación vale la mitad de la amplitud, ¿qué fracción de la energía total E es cinética y cuál es potencial? *b*) ¿Cuánto vale la elongación en la posición para la cual la mitad de la energía total es cinética y la otra mitad potencial?

Resp. *a*) $E_c/E = 3/4$, $E_p/E = 1/4$; *b*) $x = \sqrt{2}\,A$

141. Una superficie de hierro se mueve con movimiento armónico simple horizontal. Eobre la superficie descansa un bloque de acero. Se observa que el bloque empieza a deslizar cuando la vibración tiene un período de 2,3 s y una amplitud de 30,5 cm. Determinar el coeficiente de rozamiento estático del acero sobre el hierro.

Resp. $\mu = 0{,}197$

142. En un tubo en U tenemos un líquido que ocupa una longitud L. Mediante una sobrepresión en un extremo desplazamos el nivel del líquido y al suprimir aquélla, el líquido oscila. Despreciando los rozamientos, determinar la frecuencia de la oscilación suponiendo que es de amplitud pequeña.

Resp. $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

143. Una masa puntual se mueve con movimiento armónico simple y posee una aceleración de —1,22 m/s² cuando se encuentra a una distancia de 30,5 cm del centro Cuando dista de dicho centro 1,22 m, su velocidad es de —1,83 m/s. Determinar: *a*) El período de oscilación. *b*) El ángulo de fase inicial. *c*) La amplitud.

Resp. *a*) $T = 3{,}14$ s; *b*) $\theta = \text{arc tg}\,(-1{,}333) = 126°\ 7'\ 14''$; *c*) $A = 1{,}52$ m

144. En un movimiento armónico simple de pulsación ω, ¿qué relación existe, en cualquier instante, entre la amplitud, la velocidad y la elongación?

Resp. $v^2 = (A^2 - x^2)\,\omega^2$

145. Una masa puntual m está sometida a una fuerza de componentes $X = -kx$, $Y = -ky$. Se pone en movimiento en el punto $(A, 0)$ con velocidad dirigida en el sentido positivo del eje Oy y celeridad $A\sqrt{k/m}$. Determinar la trayectoria.

Resp. $x^2 + y^2 = A^2$ (circunferencia de radio A y centro en el origen de coordenadas).

146. La ecuación de un movimiento ondulatorio viene dada, en unidades del Sistema Internacional (giorgi) por $y = 20$ sen $(1000\,t - 2x)$. Determinar: *a*) La amplitud. *b*) El período. *c*) La velocidad de propagación. *d*) La longitud de onda. *e*) La máxima velocidad de vibración.

Resp. *a*) $A = 20$ m; *b*) $T = 6{,}832 \cdot 10^{-3}$ s; *c*) $v = 500$ m/s; *d*) $\lambda = 3{,}1416$ m; *e*) $v_m = 2 \cdot 10^4$ m/s

147. En el instante $t = T/4$ (T = período), el punto origen de una onda transversal ha alcanzado su posición extrema superior. ¿A qué distancia del origen se hallará una partícula que tenga en este instante una elongación positiva igual a 1/3 de la máxima? Dato: $\lambda = 10$ cm.

Resp. $x = 1{,}96$ cm

148. Un foco emisor de ondas vibra a razón de 250 Hz en el seno de un fluido en el cual la velocidad de propagación es de 250 m/s. *a*) ¿Cuál es el período? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda? *c*) Un punto A situado a 3 m del foco tiene una amplitud de vibración de 2 mm y en el instante t_0 su elongación es -2 mm. ¿Cuál será el estado vibratorio del punto B situado a 0,25 m del A, entre éste y el foco? *d*) ¿Y el del punto C situado a 0,5 m del A en el sentido opuesto al del B, en el instante t_0 si se trata de ondas planas? *e*) ¿Cuál será el estado vibratorio del punto B en el instante $t_0 + 0{,}001$ s si se trata de ondas planas?
Resp. *a*) $T = 0{,}004$ s; *b*) $\lambda = 1$ m; *c*) $y = 0$; *d*) $y = 2$ mm; *e*) $y = 2$ mm

149. Se tiene una onda plana armónica que avanza con una velocidad de propagación de 32 m/s. La amplitud vale 3,2 cm y la frecuencia 60 Hz. Suponiendo que en el origen y en el instante inicial la elongación fuera máxima, se pregunta: *a*) la elongación, velocidad y aceleración en un punto de abscisa 15,3 m una vez transcurridos 2,60 s. *b*) La longitud de onda del movimiento.
Resp. *a*) $y = -1{,}22$ cm, $v = -11{,}14$ m/s, $a = -1740{,}4$ m/s^2; *b*) $\lambda = 0{,}533$ m

150. Un muelle fijo por un extremo tiene una longitud $L = 3$ m cuando no está deformado y una constante $k = 4{,}5$ N/m y una masa total $m = 1$ kg. El muelle está estirado y su longitud es de 6 m. Se genera en él un pulso ondulatorio transversal moviendo lateralmente su extremo con una celeridad constante $u = 2$ m/s durante el tiempo que transcurre entre $t = 0$ y $t = 0{,}2$ s. *a*) ¿Cuál es la velocidad de propagación en el muelle? *b*) Dibujar la forma del muelle en los instantes $t = 0{,}1$ s, 0,2 s y 0,3 s. *c*) ¿Qué tiempo tarda el pulso en recorrer todo el muelle? *d*) Si se estirara más el muelle hasta alcanzar una longitud de 12 m, ¿qué tiempo tardaría el pulso en llegar al extremo?
Resp. *a*) 9 m/s; *c*) 2/3 s; *d*) $2\sqrt{6}$

151. Dos resortes, AB y BC, tienen iguales sus longitudes naturales l y sus masas m, pero la constante de rigidez K del primero es doble que la del segundo. Se unen por su extremo C y los otros extremos, A y B, se fijan de manera que el sistema quede estirado alcanzando una longitud total $4\,l$. Al punto de unión C se aplica un pequeño impulso a lo largo del resorte de manera que se generen ondas longitudinales. ¿Cuáles serán los tiempos de llegada de los pulsos ondulatorios a los extremos A y B?
Resp. $t_A = \sqrt{\frac{m}{K}}$, $t_B = \sqrt{\frac{2m}{K}}$

152. Una onda sonora se propaga en el aire a 330 m/s, siendo la densidad de éste 1,3 kg/m^3. Si la presión máxima es de $15 \cdot 10^{-6}$ N/m^2, *a*) determinar la intensidad del sonido. *b*) ¿Para qué pulsación sería la amplitud igual a 0,005 micras?
Resp. *a*) $I = 2{,}62 \cdot 10^{-13}$ W/m^2; *b*) $\omega = 6{,}993$ rad/s

153. Un diapasón produce una vibración del aire que le rodea de frecuencia 400 Hz. Sabiendo que la intensidad es de $2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2, determinar la amplitud de tales vibraciones si la temperatura del aire es de -13°C y su densidad a 0°C es 1,29 kg/m^3.
Resp. $A = 3{,}8 \cdot 10^{-9}$ m

154. Un automóvil tiene una bocina que da una nota de 800 Hz. Un ciclista al cual se acerca el coche percibe un sonido de 825 Hz. Si el automóvil va a 90 km/h, ¿cuál es la velocidad del ciclista?

Resp. 15,15 m/s en el mismo sentido que la del coche.

155. Una canoa se dirige perpendicularmente a un acantilado que se supone plano y vertical. A cierta distancia del mismo, un tripulante hace sonar la sirena que emte una nota que reflejada por el acantilado se percibe 5 s más tarde y un semitono más agudo (16/15 de la frecuencia emitida). Determinar: *a*) La velocidad de la canoa en el instante de sonar la sirena. *b*) A qué distancia se encuentra del acantilado, y *c*) El número de pulsaciones que podrían producirse si la frecuencia del sonido emitido fuese de 300 Hz. Dato: Velocidad del sonido = 340 m/s.

Resp. *a*) $v = 10{,}96$ m/s; b) d = 877,4 m; c) 20 pulsaciones/s

156. Dos focos sonoros separados 50 m vibran con igual amplitud y en concordancia de fase con una frecuencia de 680 Hz. *a*) Localizar los nodos de la onda estacionaria que generan. *b*) Uno de los focos retrasa su fase en un cuarto de período. ¿Seguirá existiendo onda estacionaria? Si es así, localizar la nueva posición de los nodos. Dato: Velocidad del sonido = 340 m/s.

Resp. *a*) $x = 12{,}5 + n\ 25{,}0$ cm $(n = 0, 1, 2, \ldots, 199)$;
b) $x = n\ 25{,}0$ cm $(n = 0, 1, 2, \ldots, 200)$

157. Sabiendo que la velocidad del sonido en los gases viene dada por la expresión $v = 1{,}18\sqrt{p/d}$ (p = presión, d = densidad), hallar: *a*) La velocidad del sonido en el aire. *b*) ¿Depende, dicha velocidad, de la presión? *c*) ¿Cuál será la velocidad del sonido a 20°C? Dato: Densidad del aire en condiciones normales = 1,293 kg/m³.

Resp. *a*) $v = 20\sqrt{T}$; b) No; c) $v = 342$ m/s

158. Un silbato que emite con una frecuencia de 1960 Hz produce, por su reflexión en una pared vertical, un sistema de ondas estacionarias. Determinar las distancias a la pared de los puntos donde se forman los nodos y vientres, sabiendo que la temperatura ambiente es de 20°C y que la velocidad del sonido a 0°C es de 331 m/s.

Resp. Vientres: $x = (2n + 1)$ 4,37 cm. Nodos: $x = n$ 8,75 cm ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) x medida a partir del silbato.

159. Dos músicos emiten un sonido de 460 Hz. Un observador situado entre ambos percibe 4 pulsaciones por segundo a causa de estar algo desafinados. ¿Con qué velocidad se ha de mover el observador en dirección de los músicos para no percibir pulsaciones?
Dato: Velocidad del sonido = 340 m/s.

Resp. A 1,48 m/s yendo del que da la nota más aguda hacia el otro.

160. Una ventana, cuya superficie es de 2 m², está abierta a una calle cuyo ruido produce un nivel de intensidad, en la ventana, de 50 dB. ¿Qué potencia acústica penetra por la ventana si la intensidad umbral es de 10^{-16} W/cm²?

Resp. $P = 2 \cdot 10^{-7}$ W

161. La intensidad debida a un cierto número de focos sonoros dependientes es la suma de las intensidades de los focos separados. *a*) ¿Cuál es el incremento del nivel de intensidad, sobre el producido por un solo violín, cuando tocan al unísono dos violines? *b*) Si un violín emite un sonido cuyo nivel de intensidad es de 40 dB, ¿cuántos son necesarios para elevar el nivel hasta 60 dB?

Resp. *a*) 3,01 dB; *b*) 100 violines

162. El sonido de una explosión se ha dejado de percibir a 80 km del punto en que se ha producido. Sabiendo que el umbral para la percepción de este sonido (supuesto puro) es de $48 \cdot 10^{-9}$ erg·s^{-1}·cm^{-2}, determinar: *a*) La potencia sonora de la explosión. *b*) A qué distancia la sonoridad será de 100 dB.

Resp. *a*) $P = 3{,}8$ W; *b*) $x = 0{,}8$ m

163. Si se duplica la amplitud de una onda sonora, ¿en cuánto varía la sonoridad de la misma?

Resp. $\Delta S = 6$ dB

164. Un foco sonoro puntiforme emite un sonido de frecuencia fija con una potencia de 0,01 W. Sabiendo que el umbral de audición para esta frecuencia es de 10^{-16} W/cm^2, determinar: *a*) A qué distancia se dejará de percibir dicho sonido. *b*) La sonoridad a una distancia de 4 m del foco.

Resp. *a*) $r = 28{,}2$ km; *b*) $S = 76{,}9$ dB

165. Tenemos un líquido de densidad d contenido en dos vasos comunicantes de igual sección recta y cuya comunicación, inicialmente, está cerrada con una llave. Las alturas, antes de ponerlas en comunicación, son h y h'. Si abrimos el paso del líquido, ¿cuál será el trabajo realizado por el campo gravitatorio terrestre hasta la posición de equilibrio?

Resp. $W = \frac{1}{4} d(h' - h)^2 Sg$

166. Una burbuja de aire se encuentra a 1 m de profundidad en un recipiente con un líquido de densidad 0,98 g/cm^3, siendo de 1 mm el radio de aquélla. Sabiendo que la tensión superficial es de 70 dyn/cm y que la presión atmosférica es la normal, determinar la presión en el interior de la burbuja.

Resp. $p = 1{,}1094 \cdot 10^5$ N/m^2 $= 1{,}096$ atm

167. Una muestra de material poroso de densidad 2000 g/litro, pesa en el aire 0,3500 kp y en el agua 0,1748 kp. Determinar el volumen de los poros.

Resp. $V = 0{,}2$ cm^3

168. Un trozo de madera de masa 1 kg y densidad 0,6 g/cm^3 se lanza verticalmente hacia abajo con una celeridad de $\sqrt{2}$ m/s desde un punto situado a 5 m de altura sobre la superficie de un depósito de aceite de densidad 0,9 g/cm^3. Calcular: *a*) La celeridad con que llega a la superficie del líquido. *b*) La aceleración dentro del mismo. *c*) El tiempo invertido en el descenso. *d*) La profundidad alcanzada. (El trozo de madera debe tratarse como punto material y despreciar los rozamientos.)

Resp. *a)* $v = 10$ m/s; *b)* $a = -4{,}9$ m/s^2; *c)* $t = 2{,}04$ s; *d)* $h = 10{,}2$ m

169. Pesamos un cuerpo de densidad d en una balanza. Equilibramos ésta con otras masas de valor total m' constituidas por un material homogéneo de densidad d'. Sabiendo que la densidad del aire es d_a, determinar el valor de la masa del cuerpo pesado.

Resp. $$m = m' \left(1 - \frac{d_a}{d'} + \frac{d_a}{d} \right)$$

170. Determinar la fuerza ascensional de un globo de volumen 2 m^3 lleno de hidrógeno en condiciones normales de presión y temperatura. La masa del globo junto con los accesorios es de 600 g. Datos: Densidad del hidrógeno $8{,}929 \cdot 10^{-5}$ g/cm^3 y la del aire 1,293 kg/m^3, en condiciones normales.

Resp. $F = 17{,}7$ N

171. Un cubo en forma de tronco de cono tiene su base inferior circular de radio 10 cm, la base superior (abierta) tiene un radio de 20 cm y una altura de 40 cm. Está lleno de agua. *a)* Hallar la presión en el fondo. *b)* Colocando este cubo sobre una balanza, ésta no nos indica como fuerza el producto de la presión por la superficie del fondo, sino una mayor. ¿Cuál y por qué? Se supone que el recipiente no tiene masa.

Resp. *a)* $3{,}9 \cdot 10^3$ N/m^2; *b)* $2{,}9 \cdot 10^2$ N a causa de la reacción de las paredes del cubo sobre el agua.

172. 1 kg de mercurio cae al suelo desde una altura de 1 m. Se forman gotitas que, por término medio, tienen un diámetro de 0,5 mm. Calcular la fracción de la energa cinética absorbida por la tensión superficial. Dato: Tensión superficial del mercurio = 465 dyn/cm.

Resp. 0,4 %

173. Un palillo de longitud 6 cm flota sobre el agua. Se añade una gota de alcohol a un lado del palillo, con lo que la tensión superficial en dicho lado se reduce en 8 dyn/cm. *a)* ¿En qué sentido se moverá el palillo? *b)* ¿Qué fuerza se ejercerá sobre él? *c)* ¿Cuál será su aceleración inicial si su masa es de 0,04 g?

Resp. *a)* Hacia el lado del agua; *b)* $F = 48$ dyn; *c)* $a_0 = 12$ m/s^2

174. Un tubo cilíndrico vertical de sección recta 100 cm^2 tiene en su parte superior un émbolo de 4 kg que ajusta sin rozamiento con dicho cilindro. En la parte inferior tiene un orificio de 10 cm^2. El tubo está lleno de un líquido cuya densidad es de 1,100 g/cm^3. Determinar la velocidad de salida del líquido en el instante en que la altura del líquido es de 0,5 m.

Resp. $v = 4{,}135$ m/s

175. En un depósito cilíndrico, el agua alcanza una altura H. El depósito está abierto por su parte superior y sus paredes son verticales. Se practica un orificio en la superficie lateral a una distancia h de la superficie libre del líquido. Determinar: *a)* A qué distancia x del pie del depósito alcanza el chorro al suelo. *b)* A qué altura por encima del fondo del depósito puede practicarse un segundo orificio para que el chorro que sale por él tenga

el mismo alcance que el anterior. c) Hallar el valor de h para que x sea máximo.

Resp. a) $x = 2\sqrt{(H-h)h}$; b) $y = h$; c) $h = H/2$

176. En un recipiente cilíndrico tenemos un émbolo que ajusta sin rozamiento con las paredes. En la parte inferior del cilindro existe un orificio pequeño del cual parte un tubo que salva un desnivel de 10 m. Llenamos el cilindro de agua y aplicamos una presión de 4 atm al émbolo. Determinar la velocidad de salida del agua en el extremo del tubo cuando el nivel del agua en el depósito es de 5 m.

Resp. $v = 22{,}56$ m/s

177. Un depósito cilíndrico de altura h está lleno de agua. La sección recta del depósito es S. Si practicamos un orificio de área S' en la parte inferior, determinar el tiempo de vaciado del depósito, suponiéndolo lleno inicialmente (S' mucho menor que S).

Resp. $t = 2\dfrac{S}{S'}\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$

178. Calcular la sobrepresión ejercida en un tubo de Pitot por un viento de 50 km/h en la punta del tubo.

Resp. $p' - p = 124{,}4$ Pa

179. ¿Con qué velocidad se tendría que mover un aceite de viscosidad 10 poises y densidad 0,9 g/cm³, que fluye por un conducto de 20 cm de diámetro, para alcanzar el régimen turbulento?

Resp. $v > 13{,}33$ m/s

180. Una vasija contiene aceite de densidad 0,9113 g/cm³. Una pequeña burbuja de aire asciende con velocidad límite y recorre 9 cm en 10 s. El coeficiente de viscosidad del aceite es de 0,84 poises y la densidad del aire en las condiciones del experimento es de 1,3 kg/m³. Hállese el radio de la burbuja.

Resp. $r = 0{,}195$ mm

181. La conductividad térmica de cierta sustancia varía con la temperatura según la ley $k = k_0 + BT$. Determinar la cantidad de calor que atraviesa, por segundo y metro cuadrado, una lámina sin pérdidas laterales cuyas caras se hallan a 20°C y 220°C y cuyo espesor es de 1 cm.
Datos: $k_0 = 10^{-4}\ \text{kcal}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\ \text{K}^{-1}$ y $B = 2\cdot10^{-7}\ \text{kcal}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\,\text{K}^{-2}$.

Resp. $3{,}57\ \text{kcal}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$

182. Una caja de madera de $30 \times 15 \times 10$ cm³ tiene un espesor de paredes igual a 4 mm. La conductividad del material es $k = 6\cdot10^{-4}\ \text{cal}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\ \text{K}^{-1}$. Sabiendo que contiene hielo a 0°C y que el ambiente está a 30°C, determinar la cantidad de hielo que funde por hora. Dato: Calor de fusión del hielo = 80 cal/g.

Resp. $m = 3645$ g

183. Un muro consta de tres capas de espesores 5 cm, 4 cm y 6 cm, cuyas conductividades térmicas respectivas son 0,01 $\text{cal}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, 0,02 $\text{cal}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

y 0,03 cal·cm^{-1}·s^{-1}. La temperatura de la cara exterior del muro es de 0°C y la de la interior 100°C. *a*) Hallar la temperatura de las superficies de separación de las paredes de material diferente. b) Si se quiere construir de un único material, de espesor 15 cm, que con igual diferencia de temperaturas deje pasar el mismo flujo calorífico, ¿cuál ha de ser su conductividad térmica?

Resp. *a*) $T_0 - T_1 = 55{,}5°C$, $T_1 - T_2 = 22{,}2°C$;
b) $K = 0{,}166$ cal · cm^{-1} · s^{-1}

184. En una habitación donde reina la presión normal y una temperatura de 20°C, la humedad relativa es de 60 %. Determinar: *a*) La tensión parcial del vapor de agua. b) La humedad absoluta. c) El punto de rocío. (Véase tabla 16.2.)

Resp. *a*) 10,52 tor; b) 10,4 g/m^3; c) 11,5°C

185. La habitación del problema anterior tiene un volumen de 40 m^3. Manteniéndose constante la temperatura del aire, se enfría el vidrio de una ventana hasta 4°C. *a*) ¿Qué cantidad de agua líquida se depositará sobre la misma? b) Retirada este agua, ¿cuál será la nueva humedad relativa de la habitación? (Ver tabla 16.2.)

Resp. *a*) 160 g; b) 35 %

186. Se pretende enfriar el aire de la habitación del problema 184 a base de evaporar agua en su seno. ¿Cuál será la temperatura mínima que puede alcanzarse? Datos: Calor de vaporización del agua = 587 cal/g; calor específico del aire a presión constante = 0,24 cal/g·°C; densidad del aire = = 1,3 kg/m^3. (*Sugerencia:* Resolver el problema gráficamente.)

Resp. 15,6°C

187. 100 gramos de aire se dilatan a temperatura constante e igual a 120°C, aumentando su volumen cuatro veces. Hallar: *a*) El trabajo de expansión. b) El calor necesario. c) ¿Es necesario conocer el volumen o la presión iniciales?

Resp. *a*) 15 650 J; b) 3745 calorías; c) No

188. Dos moles de un gas perfecto, cuyo calor molar a volumen constante vale 3 cal/mol · K, ocupan un volumen de 5 litros en un cierto estado inicial 1. El gas se dilata adiabáticamente por vía reversible hasta que la temperatura desciende a 300 K (estado 2). Una compresión isotérmica a dicha temperatura lleva al gas hasta el volumen inicial (estado 3) y posteriormente alcanza el estado inicial mediante un calentamiento a volumen constante. En la transformación isocora, el gas absorbe 450 cal. Tomando $R = 0{,}082$ atm · litro/mol · K, hallar: *a*) La presión del gas en el estado 3. b) La temperatura inicial del gas. c) La variación de la energía interna al pasar del estado 1 al estado 2. d) El volumen del estado 2.

Resp. *a*) 9,84 atm; b) 375 K; c) −450 cal; d) 6,98 litros

189. Un mol de gas ideal, de calor molar a volumen constante 3 cal/mol · K, ocupa inicialmente un volumen v_0. Se enfría por vía reversible, a volumen constante, sufriendo después una expansión isobárica hasta alcanzar la temperatura de 372 K, absorbiendo *en total* 690 calorías. Partiendo de las mismas condiciones iniciales, se llega al mismo estado final si somete-

mos al gas a una expansión isotérmica seguida de un calentamiento a volumen constante, ambas reversibles, en que el volumen v_0 se ha cuadruplicado. Se pide: *a*) Dibujar, aproximadamente, en el diagrama p-V, las transformaciones indicadas. ¿Varía la energía interna en la expansión isotérmica? *b*) Hallar la variación de energía interna entre los estados inicial y final. *c*) ¿Cuál será la temperatura inicial?

Resp. *a*) No; *b*) 132 cal; *c*) 329,6 K

190. Un trozo de hielo a 0°C y a la presión atmosférica normal, tiene un volumen de 900 cm^3 y se le suministra el calor necesario para convertirlo en agua a 4°C. Calcular: *a*) El trabajo exterior realizado. *b*) La variación de energía interna, durante la transformación. Datos: Calor de fusión del hielo = 80 cal/g. Densidad del hielo a 0°C = 0,917 g/cm^3.

Resp. *a*) $W = -0{,}7716$ kpm; *b*) $U_2 - U_1 = 69{,}327$ kcal

191. Dos moles de un gas ideal, de calor molar a volumen constante $C_V = 3$ cal/mol · K, ocupa inicialmente un volumen de 2 litros a una presión de 3 atmósferas. Se calienta por vía reversible a presión constante hasta duplicar su volumen. Calcular la variación de entalpía producida en el sistema.

Resp. $\Delta H = 362{,}32$ cal

192. Se mezclan 200 g de agua a 60°C con 400 g a 20°C. Calcular la variación de entropía que experimenta el sistema cuando llega al estado de equilibrio. Se supone que el calor específico del agua es igual a la unidad.

Resp. $S_2 - S_1 = 0{,}9$ cal/K

193. Cinco moles de un gas ideal biatómico se calientan a presión constante hasta que la temperatura aumente 20°C y el volumen 1 litro. Determinar: *a*) El incremento de energía interna. *b*) El incremento de entalpía. *c*) El valor de la presión.

Resp. *a*) $\Delta U = 2079$ J; *b*) $\Delta H = 2910$ J; *c*) $p = 8{,}31 \cdot 10^5$ N/m^2

194. El ciclo de una máquina térmica equivale a uno de Carnot reversible en donde la temperatura del foco frío es de 27°C y la de la caldera 477°C. El calor cedido al foco frío es de 500 kcal por hora. Determinar: *a*) el calor tomado de la caldera y *b*) la potencia de la máquina.

Resp. *a*) $Q_1 = 1250$ kcal/h; *b*) $P = 0{,}87$ kW

195. Una máquina térmica funciona según un ciclo de Carnot ideal, siendo las temperaturas del foco caliente y frío 127°C y 0°C, respectivamente. Sabiendo que la potencia útil de la máquina es de 1 C.V. y que en el refrigerante tenemos agua a 0°C con una barra de hielo de 10 kg, también a 0°C, determinar el tiempo que tardará en fundirse el hielo.

Resp. $t = 35$ minutos

196. Un mol de hidrógeno a 27°C y 10 atmósferas evoluciona por vía reversible: 1.º a volumen constante hasta reducir la presión a 1 atmósfera; 2.º a presión constante hasta recuperar la temperatura inicial. Calcular la variación de la entropía del hidrógeno.

Resp. $\Delta S = 4{,}6$ cal/K

197. Disponemos de un cilindro vertical de sección recta 10 cm^2 que tiene en su parte superior un émbolo de masa 2 kg que ajusta perfectamente, sin rozamiento, con el cilindro en el que encierra un mol de aire. Calentamos isotérmicamente, por vía reversible, hasta que el émbolo asciende $8(e-1)$ cm, donde e es la base de los logaritmos neperianos. Sabiendo que la presión atmosférica es de 10^5 N/m^2, y que la distancia inicial de la parte inferior del émbolo a la base es de 8 cm, determinar: *a*) La cantidad de calor absorbida, y *b*) la presión final.

Resp. *a*) $Q = 2{,}29$ cal; $p = 0{,}44 \cdot 10^5$ N/m^2

198. Un recipiente de paredes rígidas está aislado térmicamente del exterior y dividido interiormente por un tabique frágil en dos compartimientos iguales, uno lleno por 1 mol de gas perfecto y el otro vacío (estado inicial). Se rompe el tabique y el gas se expande hasta que queda en reposo llenando los dos compartimientos homogéneamente. Determinar cuánto varían: *a*) su presión; *b*) su entropía, al pasar del estado inicial al final.

Resp. *a*) $p_1 = p_0/2$; *b*) $S_1 - S_0 = R \ln 2$

199. Un mol de gas perfecto recorre un ciclo de Carnot con un rendimiento $r = 1/6$, iniciando su expansión isotérmica a una presión $p_0 = 2$ atm y un volumen $v_0 = 10$ litros y terminándola al alcanzar una presión $p_1 = 1$ atm. Determinar: *a*) Las temperaturas de los focos cálido y frío. *b*) El trabajo que se obtiene en un ciclo.

Resp. *a*) $T = 243{,}92$ K, $T' = 203{,}27$ K; *b*) $W = 34{,}43 \ln 2$ kpm

200. Queremos producir 10 toneladas de hielo al día utilizando una máquina frigorífica que trabaja siguiendo ciclos de Carnot reversibles. El calor lo cede la máquina al ambiente, que está a 27°C. Hallar: *a*) La potencia del motor, y *b*) la variación de la entropía del Universo, debida a este proceso.

Resp. *a*) $P = 3{,}8$ kW; *b*) $\Delta S = 0$

201. Un mol de gas perfecto evoluciona reversiblemente describiendo un ciclo constituido por dos adiabáticas y dos isocoras. El sentido de recorrido, en el diagrama *p-V*, es el de las agujas del reloj. La expansión adiabática enfría el gas desde 500°K hasta 400°K. La compresión adiabática lleva el gas hasta la temperatura de 450°K y el calentamiento a volumen constante lo lleva a las condiciones iniciales. Se pide: *a*) La temperatura del gas al final del enfriamiento a volumen constante. *b*) El rendimiento de la transformación cerrada si el sistema actúa como motor térmico.

Resp. *a*) $T_3 = 360$ K; *b*) $r = 1/5$

202. Una máquina térmica reversible funciona entre tres niveles térmicos de temperaturas $T_1 = 500$ K, $T_2 = 400$ K y $T_3 = 300$ K. Toma de T_1 la cantidad de calor $Q_1 = 700$ kcal y realiza un trabajo de 1 kWh. Calcular: *a*) Las cantidades de calor tomadas o cedidas en los otros focos. *b*) El rendimiento. *c*) Los incrementos de entropía en los distintos niveles *d*) El incremento de entropía del Universo.

Resp. *a*) $Q_2 = 2322$ kcal, $Q_3 = -2162$ kcal; *b*) $r = 0{,}285$;
c) $\Delta S_1 = 1{,}4$ kcal/K, $\Delta S_2 = 5{,}8$ kcal/K, $\Delta S_3 = -7{,}2$ kcal/K

203. *a*) Calcular la celeridad cuadrática media de las moléculas de hidrógeno en condiciones normales. *b*) ¿A qué temperatura sería doble dicha celeridad?

Resp. *a*) $v = 1838$ m/s; *b*) $t = 819$°C

204. Un recipiente contiene oxígeno en condiciones normales. Se aumenta la temperatura hasta duplicar la presión. Determinar: *a*) La celeridad cuadrática media. *b*) Cuánto valdría ésta si se triplicase la presión.

Resp. *a*) $v = 646$ m/s; *b*) $v' = 719$ m/s

205. El recorrido libre medio de una molécula de hidrógeno en condiciones normales es de $1{,}83 \cdot 10^{-5}$ cm. Determinar: *a*) El tiempo medio entre choques. *b*) La frecuencia media de choque.

Resp. *a*) $t = 10^{-10}$ s; *b*) $f = 10^{10}$ s^{-1}

206. Un recipiente de 20 litros contiene $5 \cdot 10^{23}$ moléculas de un gas tal que cada una tiene la masa de $6 \cdot 10^{-26}$ g y cuya celeridad cuadrática media es de 500 m/s. Determinar: *a*) La presión. *b*) La densidad de gas.

Resp. *a*) $p = 1{,}25 \cdot 10^5$ N/m^2; *b*) $d = 1{,}5$ kg/m^3

207. Las moléculas de un gas tienen, a 27°C, un recorrido libre medio de 1 cm. Sabiendo que el diámetro de dichas moléculas es de 1,5 Å, determinar la presión del gas.

Resp. $p = 4{,}137$ Pa

208. Para un cierto gas, $C_p/C_v = 1{,}08$. Determinar: *a*) El número de grados de libertad de su molécula. *b*) El valor de C_p. *c*) El valor de C_v.

Resp. *a*) $l = 25$; *b*) $C_p = 13{,}5\,R$; *c*) $C_v = 12{,}5\,R$

Apéndices

TABLA 1. *Prefijos SI*

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T	10^{-1}	deci	d
10^{9}	giga	G	10^{-2}	centi	c
10^{6}	mega	M	10^{-3}	mili	m
10^{3}	kilo	k	10^{-6}	micro	μ
10^{2}	hecto	h	10^{-9}	nano	n
10^{1}	deca	da	10^{-12}	pico	p
			10^{-15}	femto	f
			10^{-18}	atto	a

TABLA 2
Unidades SI derivadas que tienen nombres especiales

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en otras unidades SI	Expresión en unidades SI básicas
frecuencia	hertz	Hz		s^{-1}
fuerza	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
presión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energía	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
potencia	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
carga eléctrica	coulomb	C		$s \cdot A$
potencial eléctrico	volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
capacidad	farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
resistencia	ohm	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
conductancia	siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
flujo de inducción magnético	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
inducción magnética	tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
inductancia	henry	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
flujo luminoso	lumen	lm		$cd \cdot sr$
iluminancia	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$

(En las dos últimas expresiones el estereorradián (sr) se considera unidad básica.)

TABLA 3.

Ejemplos de unidades SI derivadas que se expresan utilizando nombres especiales

Magnitud	Nombre	UNIDAD SI	
		Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
viscosidad dinámica	pascal · segundo	Pa · s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
momento de una fuerza	newton · metro	N · m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
densidad de flujo de energía	watt/metro cuadrado	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
entropía	joule/kelvin	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
entropía másica	joule/kg · K	J/kg · K	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
energía másica	joule/kg	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
conductividad térmica	watt/metro · kelvin	W/(m · K)	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
intensidad del campo eléctrico	volt/metro	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
carga eléctrica por unidad de volumen	coulomb/metro cúbico	C/m^3	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
desplazamiento eléctrico	coulomb/metro cuadrado	C/m^2	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
permitividad	farad/metro	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
pemeabilidad	henry · metro	H · m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
energía molar	joule/mol	J/mol	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
entropía molar	joule/mol · kelvin	J/(mol · K)	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

TABLA 4.
Otras unidades utilizadas en el SI

Nombre	Símbolo	Valor en el SI
minuto	min	60 s
hora	h	3600 s
día	d	86400 s
grado	°	$(\pi/180)$ rad
minuto	′	$(\pi/10800)$ rad
segundo	″	$(\pi/648000)$ rad
litro	l	$10^{-3}m^3$
tonelada	t	10^3kg

TABLA 5.
Unidades CGS con nombres especiales

Magnitud	Nombre	Símbolo	Valor en SI
Trabajo	erg	erg	10^{-7} J
Fuerza	dina	dyn	10^{-5} N
Coeficiente de viscosidad	poise	P	0,1 Pa · s (0,1 Pl)
Viscosidad cinemática	stokes	St	10^{-4} m^2s^{-1}
Inducción magnética	gauss	Gs, G	10^{-4} T
Campo magnético	oersted	Oe	$1000/4\pi$ A · m^{-1}
Flujo magnético	maxwell	Mx	10^{-8} Wb
Luminancia	stilb	sb	10^4 cd/m^2
Iluminancia	phot	ph	10^4 lx

TABLA 6.
Algunas constantes fundamentales

Celeridad de la luz en el vacío c = 2,997925 ± 0,00003m · s^{-1}	
permeabilidad magnética del vacío	$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m^{-1}
permitividad del vacío	$\varepsilon_o = 8{,}85418 \cdot 10^{-12}$F/m
carga del electrón	$e = 1{,}60210 \cdot 10^{-19}$ F
Número de Avogadro	$N_o = 6{,}02252 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Masa en reposo del electrón	$m_e = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}$ kg
Masa en reposo del protón	$m_p = 1{,}67252 \cdot 10^{-27}$ kg
Masa en reposo del neutrón	$m_n = 1{,}67482 \cdot 10^{-27}$ kg
Constante de Faraday	$F = 9{,}64870 \cdot 10^4$ C/mol
Constante de Planck	$h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ J · s
Constante de Rydberg	$R = 1{,}097373 \cdot 10^7 m^{-1}$
Radio de Bohr	$a_o = 5{,}29167 \cdot 10^{-11}$ m
Magnetón de Bohr	$\mu_N = 5{,}0505 \cdot 10^{-27}$ J/T
Magnetón nuclear	$\mu_B = 9{,}2732 \cdot 10^{-24}$ J/T
Constante de los gases	$R = 8{,}3183$ J · K^{-1} · mol^{-1}
Volumen molar en c.n.	$V_m = 2{,}24136 \cdot 10^{-2} m^3 \cdot mol^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1{,}38054 \cdot 10^{-23}$ J · K^{-1}
Constante de la gravitación	$G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
Unidad de masa atómica	$u = 1{,}66055 \cdot 10^{-27}$ kg

TABLA 7.
Magnitudes terrestres que se usan habitualmente

Densidad del aire seco en condiciones normales	$d_a = 1{,}293$ kg · m^{-3}
Intensidad normal de la gravedad	$g_o = 9{,}80665$ m · s^{-2}
Radio ecuatorial de la Tierra	$R_e = 6{,}378 \cdot 10^6$ m
Radio polar de la Tierra	$R_p = 6{,}357 \cdot 10^6$ m
Volumen de la Tierra	$V_T = 1{,}087 \cdot 10^{21}$ m^3
Masa de la Tierra	$m_T = 5{,}983 \cdot 10^{24}$ kg
Densidad media terrestre	$d_m = 5522$ kg · m^{-3}
Velocidad angular media de rotación de la Tierra	$\omega_m = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad · s^{-1}

Indice alfabético

Absorción, 184.
— Coeficiente de, 185, 227.
Acción, 96.
— y reacción, principio de, 69, 89.
Aceleración, 43.
— Componentes intrínsecas de la, 46
— Unidades de, 49.
— absoluta, 62.
— angular, 48.
— complementaria, 63.
— de arrastre, 62.
— de Coriolis, 63.
— normal, 46.
— relativa, 62.
— tangencial, 46.
Acústica, 202.
— arquitectónica, 226.
— de salas, 226.
— física, 202.
— fisiológica, 202, 221.
— musical, 202.
— urbana, 202.
Adiabáticas de los gases, 327.
Altura de un sonido, 206.
Amortiguamiento crítico, 170.
Amplitud, 147.
Ángulo de contacto, 253.
— de fase, 148.
— de incidencia, 188.
— de Mach, 214.
— de reflexión, 188.
— de rozamiento, 78.
— límite, 189.
Areómetro, 245.
Armónico fundamental, 205.
Arquímedes, Principio de, 243.
Ascenso ebulloscópico, 296.
Atmósfera, 237, 241.
Atmósfera-litro, 319.
Atmósfera técnica, 241.
Axoide fijo, 58.
— móvil, 58.

Balanza de torsión, 103.
— hidrostática, 245.
Bar, 241.
Baría, 240.
Barómetro aneroide, 238.
— de Fortin, 237.
— de Tonnelot, 237.
— de Torricelli, 237.
Base, 64.
Bel, 222.
Bernoulli, Teorema de, 257.
Boltzmann, Principio de, 372
Boltzmann-Planck, Ecuación de, 363.
Bourdon, Tubo de, 238.
Boyle-Mariotte, Ley de, 242.
Buckingham, Teorema de, 276.

Caja de resonancia, 220.
Cálculo vectorial, 1.
Calor, 286.
— Conducción del, 304, 307, 309.
— Equivalente mecánico del, 289.
— de fusión, 292.
— de solidificación, 292.
— de sublimación, 300.
— de vaporización, 295.
— específico, 287.
Calores molares, 325, 365.
Caloría, 287.
— de quince, 287.
— media, 287.
Calorímetro, Valor en agua de un, 291.
— adiabático, 290.

Cambios de estado, 291.
Campo central, 34.
— conservativo, 30.
— de una capa esférica, 38.
— escalar, 28.
— gravitatorio, 102.
— — terrestre, 105.
— newtoniano, 35.
— vectorial, 28.
Campo newtoniano, Potencial de un, 35.
Cantidad de movimiento, 97, 116.
Capa esférica, Campo de una, 38.
Capilaridad, 254.
Carburador, 260.
Carnot, Ciclo de, 330.
— Teorema de, 336.
Cauchy, Número de, 282.
Cavendish, Experimento de, 103.
Celeridad, 42.
— angular, 48.
— de propagación, 178, 180, 182.
— del sonido, 208.
Centro de curvatura, 45.
— de empuje, 244.
— de gravedad, 111.
— de masa, 111, 112.
— de oscilación, 154.
— de percusión, 140.
— de reducción, 20.
— de vectores paralelos, 26.
— instantáneo de rotación, 64.
Centro de masa, Movimiento del, 118.
Cero absoluto, 285.
Ciclo, 319.
Ciclo de Carnot, 330.
— Rendimiento de un, 331.
Cinemática, 41.
Circulación de un vector, 29.
Cizalladura, 137.
Clapeyron, Diagrama de, 316.
Coeficiente de absorción, 185, 227.
— de distorsión, 274.
— de percusión, 143.
— de Poisson, 133.
— de rozamiento, 78.
— de viscosidad, 262.
Coeficiente de Lamé, 135.
Cohesión, 232, 247.
Complexión, 372.
Componentes cartesianas, 3, 6.
— de un sistema, 314.
— de un sistema de vectores deslizantes, 21.
— de un vector deslizante, 19.
— intrínsecas de la aceleración, 46.
Composición de aceleraciones, 62.
— de m.a.s., 159, 160.
— de velocidades, 61.
Composición de vibraciones, 164.
Compresibilidad, 136.
— de los gases, 246.
— Módulo de, 181.
Compresión uniforme, 136.
Condensación, 292.
Conducción del calor, 304, 307, 309.
— térmica en los gases, 369.
Conductilibilidad térmica, 305.
Concepto cinético de temperatura, 359, 360.
Congelación, 292.
Conservación de la cantidad de movimiento, 117.
— de la energía, 95, 320.
— del momento cinético, 118, 128.
Constante de la gravitación, 102.
— de tiempo, 166.
— elástica, 150.
— recuperadora, 150.
Contacto entre líquidos, 251.
— sólido y líquido, 253.
Contracción transversal, 133.
Convección, 304, 311.
— forzada, 311.
— natural, 311.
Coordenadas termodinámicas, 314.
Coriolis, aceleración de, 63.
— Teorema de, 62.
Corriente, Líneas de, 255.
— Tubo de, 256.
Cosenos directores de un vector, 3.
Cualidades del sonido, 203.
Cuerda, Instrumentos de, 214.
— vibrante, 214.
Cuerpo elástico, 131.
— rígido, 50.
Cuña, 79.
— Irreversibilidad de la, 79.
Cursor, 16.
Curvas de Lissajous, 161.
Curvatura, Centro de, 45.
— Radio de, 45.

Choque, 141, 143.

Dalton, Ley de, 361.
Derivada de un vector, 13.
Decibel, 222.
Deformación, Energía potencial de, 131.
— elástica, 131.
— inelástica, 131.
Densímetro, 245.
Descenso crioscópico, 293.
Desorden, 362.
Desplazamiento, 41.
Destilación, 297.

Diafragma, 219.
Diagrama de Clapeyron, 316.
— del sólido libre, 71.
Diagramas termodinámicos, 315.
Diapasón, 219.
Diferencia de potencial, 31.
— de vectores, 6.
Difracción, 198.
— de Fraunhofer, 198.
— de Fresnel, 198.
— del sonido, 211.
Difusión de gases, 362.
— mutua, 361.
Dimensiones físicas, 91.
Dinámica, 86.
— Principios de la, 87.
— de fluidos, 255.
Dinamómetro, 67.
Doppler-Fizeau, Efecto, 211.

Ebullición, 295.
Ecuación de Boltzmann-Planck, 372.
— de continuidad, 257.
— de estado, 315.
Efecto Doppler-Fizeau, 211.
Eje central, 22.
— de rotación, 51.
— instantáneo, 57.
Elasticidad, 130.
— Límite de, 131, 133.
— por tracción, 132.
Elongación, 148.
Empuje, 244.
— Centro de, 244.
Energía, 95.
— Conservación de la, 95.
— Equipartición de la, 363.
— Unidades de, 96.
— cinética, 94, 126.
— — media molecular, 360.
— elástica, 138.
— en la rotación, 125.
— gravitatoria, 108.
— interna, 322.
— mecánica, 95.
— potencial, 95.
— — de deformación, 131, 138.
— superficial, 249.
Enfriamiento, Ley del, 312.
— Velocidad de, 312.
Entalpía, 322.
Entropía, 338, 371.
Equilibrio de un cuerpo rígido, 71.
— de un fluido, 235.
— de un punto, 67.
— de un sistema, 70.
— — de cuerpos, 76.
Equilibrio de un sistema rígido, 71.
— térmico, 284.
— termodinámico, 314.
Equipartición de la energía, 363.
Equivalente mecánico del calor, 289.
Escala compensada, 237.
— de longitudes, 269.
— de fuerzas, 272.
— de tiempos, 269.
— Kelvin, 338.
— termodinámica, 338.
Escalares, Magnitudes, 1.
Esfuerzo de rotura, 133.
— medio, 132.
Espectro acústico, 205.
Esfera de acción de una molécula, 248.
Estado, Ecuación de, 315.
— de un sistema, 313.
— hidrométrico, 298.
Estancamiento, 260.
Estática, 66.
— de sistemas, 70.
— del punto, 67.
— de un sistema de cuerpos, 76.
— de un sistema rígido, 71.
— gráfica, 81.
Euler, Número de, 278.
Evaporación, 294.
Experimento de Cavendish, 103.
— de Joule-Kelvin, 323.
— del tabique poroso, 324.
Eyring, Fórmula de, 229.

Factor de amortiguamiento, 169.
Fase, 314.
— Ángulo de, 148.
— inicial, 148.
Fenómenos de transporte, 368.
Filete, 256.
Flecha del torsor, 26.
Fluido, 232.
— Equilibrio de un, 235.
— Presión en un, 233.
— perfecto, 233.
Fluidos. Dinámica de, 255.
Flujo de un vector, 33.
— entrante, 33.
— saliente, 33.
— total, 33.
Fon, 223.
Fórmula de Eyring, 229.
— de Sabine, 230.
Fórmulas de Poisson, 57.
Fortin, Barómetro de, 237.
Fourier, Teorema de, 205.
Fraunhofer, Difracción de, 198.
Frecuencia, 148.

Frecuencia angular, 149.
Fresnel, Difracción de, 198.
— Representación de, 164.
— Zonas de, 199.
Froude, Número de, 278.
Fuerza, 66.
— Unidades de, 90, 107.
— a distancia, 67.
— central, 100.
— conservativa, 95.
— de contacto, 67.
— de ligadura, 69.
Fuerzas activas, 70.
— aplicadas, 70.
— de inercia, 93.
— de ligadura, 70.
— exteriores, 70, 116.
— interiores, 70, 116.
— intermoleculares, 247.
— másicas, 234.
Fuerzas vivas, Teorema de las, 94, 119.
Funicular, 82.
Fusión, 291.
— Leyes de la, 292.
— vítrea, 291.

Gas real, Isotermas de un, 302.
Gases, 303.
— Compresibilidad de los, 246.
Gasto de un tubo, 263.
Gauss, Teorema de, 36.
Gradiente, 33.
Grados de libertad, 364.
Graham, Ley de, 363.
Grafostática, 81.
Gravitación, 101.
— Constante de la, 102.
Grupos adimensionales, 275.
— Empleo de los, 283.
Guía, 68.

Higrómetros, 300.
Histeresis elástica, 133.
Hodógrafa, 44.
Hooke, Ley de, 132.
Humedad absoluta, 297.
— relativa, 298.
Huygens, Principio de, 185.
Huygens-Fresnel, Principio de, 198.

Igualdad de vectores, 4.
Impedancia mecánica, 174.
Impulso, 96.
— angular, 100.
Incidencia, Ángulo de, 188.
Índice de refracción, 188.
Inercia, Fuerzas de, 93.
— Postulado de la, 87.
Infrasonidos, 202, 221, 225.
Instrumentos de cuerda, 214.
Integral de un vector, 15.
Intensidad, Nivel de, 222.
— del sonido, 203.
— de una onda, 183.
— de un mov. ondulatorio, 183.
— umbral, 221, 222.
Interferencia constructiva, 192.
— destructiva, 192.
Interferencias, 191.
— sonoras, 209.
Interpretación cinética de la presión, 356.
Irreversibilidad de la cuña, 79.
— del tornillo, 79.
Isofonas, 224.
Isoterma crítica, 303.
Isotermas de un gas real, 302.

Joule, Ley de, 325.
Joule-Kelvin, Experimento de, 323.
Jurin, Ley de, 254.

Kepler, Leyes de, 103.
Kundt, Tubo de, 210.

Lamé, Coeficientes de, 135.
Ley de Boyle-Mariotte, 242.
— de Dalton, 325.
— de Graham, 363.
— de Hooke, 132.
— de Joule, 325.
— de Jurin, 254.
— de las áreas, 101.
— de Newton, 312.
— de Poiseuille, 265.
— de semejanza de Newton, 272.
— de semejanza elástica, 282.
— de Stokes, 267.
— de Weber-Fechner, 222.
— de Wiedemann-Franz, 310.
— del enfriamiento, 312.
Leyes de Kepler, 103.
— de Newton, 88, 89.
Licuación, 292.
— de gases, 301.
Ligadura, 68.
— Fuerza de, 69.
— bilateral, 68.
— unilateral, 68.
Límite de elasticidad, 131, 133.
— de ruptura, 133.

Línea de fuerza, 29.
Líneas de corriente, 255.
Líquido viscoso, 262.
Lissajous, Curvas de, 161.
Longitud de onda, 179.
— reducida, 141, 154.

Mach, Ángulo de, 214.
— Número de, 214, 281.
Magnitudes escalares, 1.
— vectoriales, 1.
Manómetro, 239.
— metálico, 240.
Máquina frigorífica, 330.
Masa, Unidades de, 90, 107.
— agente, 35.
— inerte, 88, 107.
— pesante, 107.
Matriz dimensional, 277.
Mayer, Relación de, 327.
Mecánica física, 86.
— racional, 86.
— relativista, 87.
Membrana vibrante, 218.
Menisco, 253.
Método de Searle, 307.
Milibar, 241.
Módulo de compresibilidad, 181.
— elasticidad cúbica, 136.
— rigidez, 137.
— un vector, 2.
— Young, 133.
Momento cinético, 99, 116, 128.
— de inercia, 121.
— de un vector, 16, 18.
— mínimo, 23.
— respecto a un eje, 18.
— respecto a un punto, 16.
— resultante, 20.
Móvil perpetuo, 322, 335.
Movimiento, Relatividad del, 59.
— absoluto, 60.
— aperiódico, 170.
— armónico, amortiguado, 167, 170.
— — angular, 170.
— — simple, 145.
— circular, 48.
— cualquiera, 54.
— de arrastre, 60.
— de rotación, 51, 125.
— de traslación, 50.
— del centro de masa, 118.
— estacionario, 255.
— helicoidal, 53.
— ondulatorio, 177, 183.
— — armónico, 178.
— oscilatorio, 148.
Movimiento planetario, 104.
— plano, 63.
— rectilíneo, 46.
— relativo, 60.
— uniforme, 46.
— vibratorio, 148.

Newton, Ley de, 312.
— Leyes de, 88, 89.
— Número de, 277.
Nivel de intensidad, 222.
Nodos, 196.
Núcleos de condensación, 296.
Número de Cauchy, 282.
— de Euler, 278.
— de Froude, 278.
— de Mach, 214, 281.
— de Newton, 277.
— de Reynolds, 266, 280.
— de Weber, 279.

Oído, 221.
Onda, 177.
— Intensidad de una, 183.
— Longitud de, 179.
— Superficie de, 178.
— balística, 213.
— de presión, 205.
— longitudinal, 180.
— plana, 180.
— polarizada, 180.
— progresiva, 186.
— regresiva, 186.
— transversal, 180.
Ondas estacionarias, 195, 210.
— sonoras, 202.
Oscilación, 148.
Oscilaciones amortiguadas, 165.
— forzadas, 171, 176.

Par, 21.
— de fuerzas, 73.
Pared fría, Principio de la, 297.
Partícula, 87.
Pascal, Principio de, 241.
Paso de rosca, 54.
Péndulo de Kater, 154.
— de torsión, 152.
— físico, 153.
— reversible, 154.
— simple, 150.
Percusión, 138.
— Centro de, 140.
— Coeficiente de, 143.
Pérdida de carga, 265.

Período, 148.
Pitot, Tubo de, 260.
Pivotamiento, Resistencia al, 80.
Placa vibrante, 218.
Plano osculador, 44.
Poder absorbente, 228.
Poise, 262.
Poiseuille, Ley de, 265.
Poisson, Coeficiente de, 133.
Polar fija, 64.
— móvil, 64.
Polígono de fuerzas, 82.
— dinámico, 82.
— funicular, 82, 83.
— vectorial, 82.
Polo, 20.
Postulado de la inercia, 87.
Potencia, 95.
— Unidades de, 96, 108.
— en las oscilaciones, 176.
Potencial, 30, 31.
— Diferencia de, 31.
— de un campo newtoniano, 35.
— gravitatorio, 102.
Prensa hidráulica, 241.
Presión, Interpretación cinética de la, 347.
— Unidades de, 240.
— atmosférica, 237.
— de un gas, 237.
— crítica, 303.
— en un fluido, 233.
— manométrica, 239.
Primer principio de la Termodinámica, 321.
Principio de Arquímedes, 243.
— de Boltzmann, 372.
— de Huygens, 185.
— de Huygens-Fresnel, 198.
— de acción y reacción, 69, 89.
— de la inercia, 87.
— de la pared fría, 297.
— de Pascal, 241.
— de Watt, 297.
Principios de la Dinámica, 87.
Probabilidad termodinámica, 363.
Proceso, 315.
Producto de un escalar por un vector, 6.
— escalar, 8.
— vectorial, 10.
Propagación del calor, 303.
Propiedades de los vapores, 296.
Pulsación, 148.
Pulsaciones, 193.
— acústicas, 210.
Pulverizador, 259.
Punto crítico, 303.
— de coincidencia, 60.
Punto de congelación, 293.
— de estancamiento, 260.
— de rocío, 300.
— en equilibrio, 67.
— ligado, 68.
— material, 87.
— triple, 301.
— vinculado, 68.
Puntos fijos, 285.

Quincke, Tubo de, 209.

Radio de curvatura, 45.
— de giro, 121.
Rayos, 83.
Reacción vincular, 69.
Recorrido libre medio, 228, 366.
Reducción de sistemas de vectores, 24.
Reflexión, 186, 190.
— Ángulo de, 188.
— del sonido, 209.
— total, 189.
Refracción, 186.
— Índice de, 188.
— del sonido, 209.
Régimen laminar, 262.
— permanente, 255.
— turbulento, 266.
Rehielo, 293.
Relación de Mayer, 327.
Relajación, Tiempo de, 166.
Relatividad del movimiento, 59.
Rendimiento de las máquinas reales, 343.
— un ciclo de Carnot, 331.
— una máquina frigorífica, 331.
Representación de Fresnel, 164.
Resistencia térmica, 306.
Resistencias hidráulicas, 267.
— viscosas, 267.
Resistividad térmica, 306.
Resonancia, 174.
— Caja de, 220.
— acústica, 219.
— aguda, 175.
— catastrófica, 175.
Resultante general, 20.
Reverberación, 226.
— Tiempo de, 229.
Reynolds, Número de, 266, 280.
Rocío, 300.
Rodadura, Resistencia a la, 79.
Rotación, Eje de, 51.
— Movimiento de, 51.
— de un cuerpo, 119.
Rozamiento, 77.
— Ángulo de, 78.

Rozamiento, Coeficiente de, 78.
— por deslizamiento, 78.
— por pivotamiento, 79.
— por rodadura, 79.
Ruido, 206.
Ruleta, 64.
Ruptura, Límite de, 133.

Sabine, 228.
— Fórmula de, 230.
Saturación, Tensión de, 294.
Searle, Método de, 307.
Segundo principio de la Termodinámica, 335, 342, 345, 346, 347.
Semejanza, 273.
— Leyes de, 269.
— cinemática, 270.
— dinámica, 272.
— elástica, 282.
— geométrica, 269.
— material, 272.
— térmica, 274,
Sistema, Componentes de un, 314.
— abierto, 314.
— aislado, 314.
— — mecánicamente, 314.
— — térmicamente, 314.
— cerrado, 314.
— de cuerpos en equilibrio, 76.
— heterogéneo, 314.
— homogéneo, 314.
— rígido, 50, 71.
— termodinámico, 313.
Sistemas de unidades, 108.
— de vectores, 24.
— — deslizantes, 20.
— inerciales, 92.
Sobresaturación, 296.
Solidificación, 292.
Sólido, 71.
— elástico, 131.
— libre, Diagrama del, 71.
Sonido, 202.
— Altura de un, 206.
— Celeridad del, 208.
— Cualidades del, 203.
— Difracción del, 211.
— Intensidad del, 203.
— Reflexión del, 209.
— Refracción del, 209.
— Timbre de un, 206.
— Tono de un, 206.
Steiner, Teorema de, 124.
Stokes, Ley de, 267.
Subfusión, 293.
Sublimación, 292, 300.
Suma de vectores, 4.
Superficie de onda, 178.
— equiescalar, 28.
— equipotencial, 32.
— isoescalar, 28.
Sustancia termométrica, 285.

Tabique poroso, Experimento del, 324.
Temperatura, 284.
— Concepto cinético de, 359, 360.
— absoluta, 285.
— crítica, 303.
— de congelación, 292.
— de fusión, 292.
— de inversión, 325.
— termodinámica, 338.
Tensión de saturación, 294.
— de vapor, 294.
— superficial, 249.
Teorema de Bernoulli, 257.
— de Buckingham, 276.
— de Carnot, 336.
— de Coriolis, 62.
— de Fourier, 205.
— de Gauss, 36.
— de la cant. de mov., 97.
— de las fuerzas vivas, 94, 119.
— de π, 276.
— de Steiner, 124.
— de Torricelli, 261.
— de Varignon, 18.
— del momento cinético, 100.
Teoría cinética, 355.
Termodinámica, 313.
— Primer principio de la, 321.
— Segundo principio de la, 335, 342, 345, 346, 347.
Termómetro, 285.
Tiempo de relajación, 166.
— reverberación, 229.
Tiempos homólogos, 269.
Timbre, 203.
— de un sonido, 206.
Tonnelot, Barómetro de, 237.
Tono, 203, 206.
Torricelli, Barómetro de, 237.
— Teorema de, 261.
Torsión, 137.
Torsor, 26.
— Flecha del, 26.
Trabajo, 80.
— Unidades de, 90, 108.
— de dilatación, 318.
— en la rotación, 125.
Tracción, Elasticidad por, 132.
Transformación, 315.
— adiabática, 316.
— cerrada, 319.

Transformación isobárica, 316.
— isocora, 316.
— isostérica, 316.
— isotérmica, 316.
Transformaciones reversibles, 316.
Transporte, Fenómenos de, 368.
Traslación, Movimiento de, 50.
— curvilínea, 51.
Trayectoria, 41.
Trinomio invariante, 21, 57.
Tubo de Bourdon, 238.
— de corriente, 256.
— de Kundt, 210.
— de Pitot, 260.
— de Quincke, 209.
Tubos sonoros, 216.

Ultrasonidos, 202, 221, 225.
Umbral de intensidad, 221, 222.
Unidades, Sistemas de, 108.
— de aceleración, 49.
— de energía, 96.
— de fuerza, 90, 107.
— de masa, 90, 107.
— de potencia, 96, 108.
— de presión, 240.
— de trabajo, 90, 108.
— de velocidad, 49.

Valor en agua de un calorímetro, 291.
Vapor saturante, 294.
— sobresaturado, 296.
Vapores, 303.
— Propiedades de los, 296.
Vaporización, 292, 294.
— Calor de, 295.
Variables de estado, 314.
Varignon, Teorema de, 18.
Varilla vibrante, 218.
Vector, 1.
— Cosenos directores de un, 3.
— Derivada de un, 13.
— Integral de un, 15.
— Módulo de un, 2.
— Momento de un, 18.
— de posición, 42.
— función de un escalar, 13.
Vector nulo, 6.
— opuesto, 6.
— unitario, 7.
Vector deslizante, Componentes de un, 19.
Vectores, Diferencia de, 6.
— Igualdad de, 4.
— Suma de, 4.
— aplicados, 16.
— deslizantes, 16.
— fijos, 16.
— libres, 4, 16.
Vectores deslizantes, Sistemas de, 20.
Vectores paralelos, Centro de, 26.
Vectorial, Cálculo, 1.
Vectoriales, Magnitudes, 1.
Velocidad, 42.
— Unidades de, 49.
— absoluta, 61.
— angular, 52.
— areolar, 101.
— cuadrática media, 359.
— de arrastre, 62.
— de enfriamiento, 312.
— de escape, 110.
— de propagación, 178.
— del sonido, 208.
— relativa, 62.
Velocidades, Composición de, 61.
Versor, 7.
Vibraciones, Composición de, 164.
Vientres, 196.
Vínculo, 68.
Viscosidad, 262.
— Coeficiente de, 262.
— cinemática, 280.
— de los gases, 368.
Volumen crítico, 303.

Watt, Principio de, 297.
Weber, Número de, 279.
Weber-Fechner, Ley de, 222.
Wiedemann-Franz, Ley de, 310.

Young, Módulo de, 133.

Zonas de Fresnel, 199.

61485

CAJA DE AHORROS DE ALICANTE Y MURCIA
BIBLIOTECA
GABRIEL MIRÓ
ALICANTE

ISBN - 84 - 291 - 4198 - 7